

論文 補強材の付着すべりとせん断変形を考慮したコンクリート梁モデルの弾性動的解析

中井 麻陽*1・井上 圭一*2・和田 俊良*3

要旨：本論文では、補強材の付着すべりとせん断変形を考慮した梁部材の解析モデルを構築し、弾性範囲の動的応答性状を対象として解析例を示し、振動性状に及ぼす影響について考察を行った。まず、解析モデルを設定し、自由振動解析によりせん断変形の考慮による固有振動数の違いと、付着性状が振動性状に及ぼす影響について示した。さらに、時刻歴応答解析を実施し、せん断変形の考慮と付着すべり変位に関わる減衰が振動性状に及ぼす影響について示した。本解析例の範囲において、付着すべりの減衰を考慮したことによる最大応答変位と応答変位の振幅に関する低減効果について示した。

キーワード：付着すべり，ティモシェンコ梁，固有振動，時刻歴応答，減衰

1. はじめに

RC・PC 構造が構造的に成立するためには、鉄筋・PC 鋼材などの補強材がコンクリートと付着して応力が確実に伝達されることが必要である。しかし、経年劣化や施工不良等により、補強材とコンクリートの付着が不十分になっていることもありえる。付着に関連して、補強材の定着部からの抜け出しの影響も考慮すべきである。材料非線形を考慮した挙動を考えた解析を行う場合、補強材については完全付着から付着がない状態までの任意の付着状態を対象にした解析モデルが求められる。

一方、アンボンド PC という敢えて付着を持たせない構造も使用されるようになっており、圧着接合に関する研究も行われている^{例えば1)}。また、アンボンドの補強材を制振要素として使用することも検討されている^{2),3)}。

文献 4)では、補強材のすべりを考慮した解析モデルの提案と自由振動解析が行われており、文献 5)では、時刻歴応答解析が行われている。文献 6)では、コンクリート及び鉄筋の材料非線形と付着すべり、付着応力に関する非線形性を考慮した動的解析について示している。しかしながら、文献 6)では、解析における減衰効果の取り扱いについて不明である。

ラーメン構造における部材の振動モードを考えると、短スパンの振動モードの変形も想定されるため、梁部材の解析モデルには、せん断変形の影響を考慮しておくことが望まれる。文献 4)~6)ではオイラーの仮定に基づく曲げ変形と軸方向変形のみを対象としている。

本研究では、文献 4),5)を発展させ、まず、補強材の付着すべりおよびティモシェンコの仮定によるせん断変形の影響を考慮した RC・PC 梁部材の解析モデルを示す。次に、解析例を示し、固有値解析及び時刻歴応答解析に

よりせん断変形と付着すべり現象を考慮した振動性状について示す。最後に、付着すべり変位に起因する減衰作用の影響について考察する。尚、本研究では振動性状に関する基本的な考察を目的とし、コンクリートのひび割れや補強材の降伏を考慮せず、線形範囲を対象とする。

2. 解析モデルと振動方程式

2.1 基本仮定事項

本研究における解析モデルの定式化において設けた基本仮定事項は次のとおりである。

- (1) 梁には軸力、曲げ、せん断が作用するものとし、ティモシェンコ梁理論に基づく微小変形理論が適用される。
- (2) コンクリートは弾性体であり、コンクリート断面には変形後も平面保持の仮定が成立する。
- (3) 梁断面には m 層の補強材が配筋されており、また梁せい方向には大きさを持たず、配筋位置に集中して存在する軸方向力のみを負担する弾性線材と仮定する。
- (4) 個々の補強材層とコンクリートの間には、配筋（材軸）方向の付着すべりが生じ得るものとする。ある位置における個々の補強材層のすべり変位は、平面が保持されるその位置のコンクリート部分からの相対変位で表示でき、また、付着応力とすべり変位の間には線形関係が成立するものとする。つまり、 i 層の補強材の付着応力 τ_{bi} が、 $\tau_{bi} = K_{bi}S_i$ と表わされる。但し、 K_{bi} : i 層の補強材の付着係数、 S_i : i 層の補強材のすべり変位であり、本論文では、付着係数をパラメータとして付着すべりを考慮する。この関係式より、付着係数の単位は N/mm^3 である。

*1 福井大学 大学院 工学研究科 (学生会員)

*2 福井大学 学術研究院 建築建設工学講座 博士(工学) (正会員)

*3 北海道職業能力開発大学校 建築科 博士(工学) (正会員)

2.2 定式化に必要な変位場

図-1 にコンクリート梁要素の座標と断面記号を示す。本解析を行うために必要な変位場は、基準軸上の材軸(x)方向の変位 v 、鉛直(z)方向の変位 w 、梁の平均せん断回転角 β 、および断面内に存在する m 層の補強材のすべり変位 S_i ($i = 1 \sim m$)の計 $(3 + m)$ 個の独立変数である。

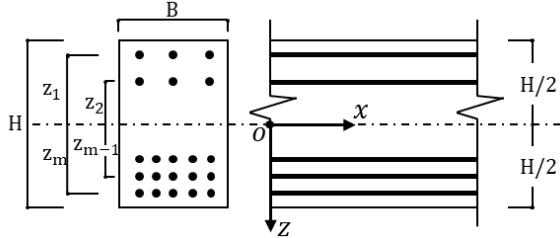


図-1 コンクリート梁要素の座標と断面記号

2.3 振動方程式の定式化と解析条件

変数に対して $(\cdot)$, $(\ddot{\cdot})$ は時間 t に関する1階及び2階微分、つまり速度、加速度を表すものとする。

2.3.1 仮想仕事方程式

減衰効果及び外力を考慮した動的解析のための仮想仕事方程式は次のようになる。

$$\delta U - \delta T - (\delta W - \delta D) = 0 \quad (1)$$

但し、 δU : 歪エネルギーの第一変分、 δT : 運動エネルギーの第一変分、 δW : 外荷重による仮想仕事、 δD : 減衰エネルギーの第一変分

2.3.2 減衰エネルギー

減衰効果の設定に際しては、本解析ではモード減衰を仮定することを基本とし、モード減衰エネルギーを D_{mod} 、付着すべりにより生じる減衰エネルギーを D_b とし、 δD は(2)式のように表せると仮定する。

付着すべりに関する減衰は、摩擦作用の影響が大きいとされているが³⁾、本研究では粘性減衰として仮定する。(2)式中の δD_b は(3)式のように表される。

$$\delta D = \delta D_{mod} + \delta D_b \quad (2)$$

$$\delta D_b = \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m C_{bsi} A_{bsi} \dot{S}_i \delta S_i \right\} dx \quad (3)$$

但し、 L : 要素長、 C_{bsi} : i 層の補強材の付着すべり速度に関わる単位面積当たりの粘性減衰係数、 A_{bsi} : 単位長さ当たりの補強材付着面積

2.3.3 外力による仮想仕事

(1)式中の外力による仮想仕事は、外力の荷重条件によって与えられる。時間 t における外荷重を軸荷重 $P_v(t)$ 、鉛直方向の集中荷重 $P_w(t)$ 、補強材の緊張荷重 $P_{si}(t)$ とすると、次のような式で表される。

$$\delta W = P_v(t) \delta v + P_w(t) \delta w + \sum_{i=1}^m P_{si}(t) \delta S_i \quad (4)$$

2.3.4 有限要素法による振動方程式

(1)式から、有限要素法による補強材の付着すべりとせん断変形を考慮したコンクリート梁モデルの振動方程式は通常の有限要素展開の手続きに従って次のように導くことができる。質量マトリックス、剛性マトリックスに関しては、せん断変形に関する項を追加する以外は、文献7)と同様に得られる。尚、本研究では、 v , β , S_i は1次の変位関数、 w は3次の変位関数を仮定した。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{vv} & M_{vw} & M_{v\beta} & M_{vS_i} \\ & M_{ww} & M_{w\beta} & M_{wS_i} \\ & & M_{\beta\beta} & M_{\beta S_i} \\ \text{sym.} & & & M_{S_i S_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{v} \\ \Delta \ddot{w} \\ \Delta \ddot{\beta} \\ \Delta \ddot{S}_i \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_{vv} & C_{vw} & C_{v\beta} & C_{vS_i} \\ & C_{ww} & C_{w\beta} & C_{wS_i} \\ & & C_{\beta\beta} & C_{\beta S_i} \\ \text{sym.} & & & C_{S_i S_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{\beta} \\ \Delta \dot{S}_i \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vw} & K_{v\beta} & K_{vS_i} \\ & K_{ww} & K_{w\beta} & K_{wS_i} \\ & & K_{\beta\beta} & K_{\beta S_i} \\ \text{sym.} & & & K_{S_i S_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \beta \\ \Delta S_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_v(t) \\ P_w(t) \\ 0 \\ P_{si}(t) \end{Bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

但し、 $\{\Delta S_i\}$, $\{\dot{\Delta S}_i\}$, $\{\ddot{\Delta S}_i\}$ はそれぞれ、 i 層の補強材のすべり変位に関する節点変位ベクトル、節点速度ベクトル、節点加速度ベクトルを、全補強材層($i = 1 \sim m$)について補強材層の並び順に従って構成したものである。

3. 解析モデル

本論文で検討を行う解析モデルを図-2 に示す。この解析モデルの梁断面、柱断面寸法は文献8)に記載されているものを参考にし、梁部材長はせん断変形の影響が大きくなるモデルを想定して2650mmに設定した。柱梁接合部における補強材の付着すべりを考慮するために、梁両側の柱部分も梁部材の延長としてモデル化したが、変位 v , w , θ (たわみ角 $\partial w / \partial x$)、 β は柱部分(節点1~5と15~19)で拘束し、補強材のすべり変位は柱端部(節点1と19)で拘束した。梁には、スラブや仕上げ材などの固定荷重及び積載荷重を想定し、1.0 ton分の質量を梁部分に加えることとした。要素分割については予備計算を参考に梁10等分割、各柱4等分割の計18要素とした。表-1に仮定した材料性状などを示す。せん断補正係数として長方形断面に対する $\kappa=5/6$ を用いた。

解析パラメータとして、付着係数 K_b を $10^{-5} \sim 10^6 \text{ N/mm}^3$ の範囲で10倍ごとに变化させて解析を行った。もちろん、通常の異形鉄筋に対して、弾性範囲では完全付着に近い性状になるものと想定されるが、本論文は、付着すべりの影響を考慮したコンクリート梁部材の解析モデルに関する研究であり、今後、本研究結果を材料非線形解析やアンボンドPC部材の解析などへの発展をしたいと

考えているため、任意の付着係数を設定して解析例を示す。解析上では、各要素で任意の付着係数を設定できるが、補強材全体で同一の付着係数を持つものと仮定した。

尚、比較のためせん断変形の影響を無視した梁モデル（以下、オイラー梁）の解析も行った。

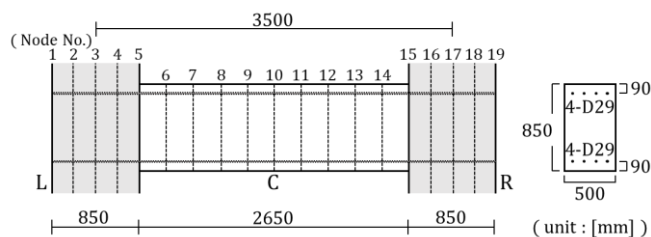


図-2 解析モデルの概要と要素分割

4. 自由振動解析

4.1 1次固有振動数について

固有振動性状に及ぼす固有値解析を行い、振動性状に及ぼすせん断変形と付着係数の影響について考察する。尚、固有値解析においては減衰の影響を無視している。

図-3には、横軸に付着係数、縦軸に1次固有振動数を示した。図より、付着係数 10^{-1} 以下の場合には、ほぼアンボンド状態の性状になり、付着係数 10^3 以上の場合には、ほぼ完全付着の性状となる事が分かる。その中間の値の場合（本解析例の場合には $10^0 \sim 10^2 \text{ N/mm}^3$ ）には、付着係数の影響により1次固有振動数が変化する。

ティモシェンコ梁とオイラー梁を比較すると、せん断変形の影響により、すべての付着係数に対して、ティモシェンコ梁の振動数が30%程度小さい値となっている。付着係数の違いが及ぼす1次固有振動に及ぼす影響は、オイラー梁とティモシェンコ梁モデルで同様である。

4.2 せん断変形の影響について

オイラー梁及びティモシェンコ梁の振動モードと振動数について示し、せん断変形の影響について考察する。ここでは、付着係数については完全付着に相当する 10^5 N/mm^3 とした。

図-4に、オイラー梁の1次から6次までの振動モードを示す。図には、軸方向変位、鉛直変位、たわみ角、補強材のすべり変位の4種の振動モードが併記されている。図-5にティモシェンコ梁の結果を示すが、これらの図にはせん断たわみ角の振動モードを追加して示している。

当然ながら、軸方向変位、鉛直変位、すべり変位は距離の次元、たわみ角、せん断たわみ角は角度の次元であるため、これらの数値の大小についての比較はできない。これらの全ての振動モードは、各振動次数における固有ベクトル成分の最大値が1となるように正規化して表示し、スプライン曲線で補完して描画したものである。

図-4の2次モード、4次モード、6次モードと図-5の3次モード、5次モードは材軸方向変位の振動が卓越するモードとなり、せん断変形の影響を受けないため、振動モードと固有振動数は同じ結果が得られる。図-4の1次モード、3次モード、5次モードと図-5の1次モード、2次モード、4次モード、6次モードは鉛直たわみ変位のモードが卓越するモードになる。4.1でも示したようにティモシェンコ梁はせん断変形の影響により固有

表-1 仮定材料性状

コンクリート		
密度	(g/cm^3)	2.30
ヤング係数	(N/mm^2)	2.06×10^4
ポアソン比		0.2
せん断補正係数		5/6
補強材		
密度	(g/cm^3)	7.85
ヤング係数	(N/mm^2)	2.06×10^5

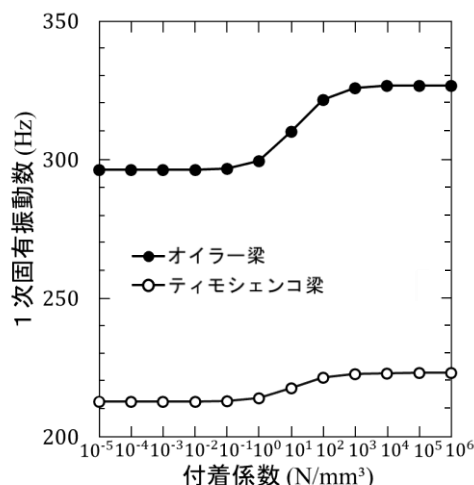


図-3 各付着係数に対する1次固有振動数

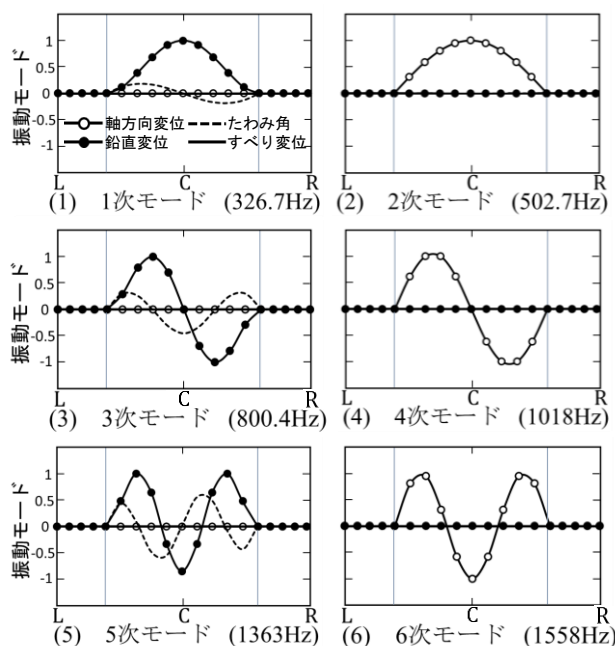


図-4 オイラー梁 振動モード ($K_b = 10^5 \text{ N/mm}^3$)

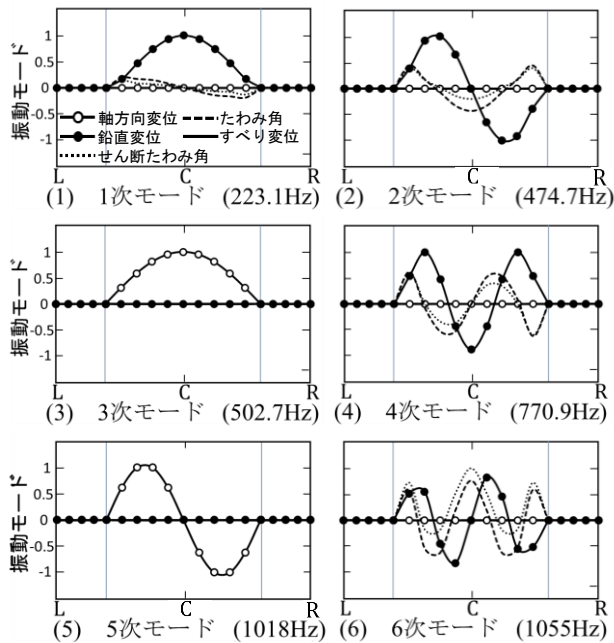


図-5 ティモシェンコ梁 振動モード

($K_b = 10^5 \text{ N/mm}^3$)

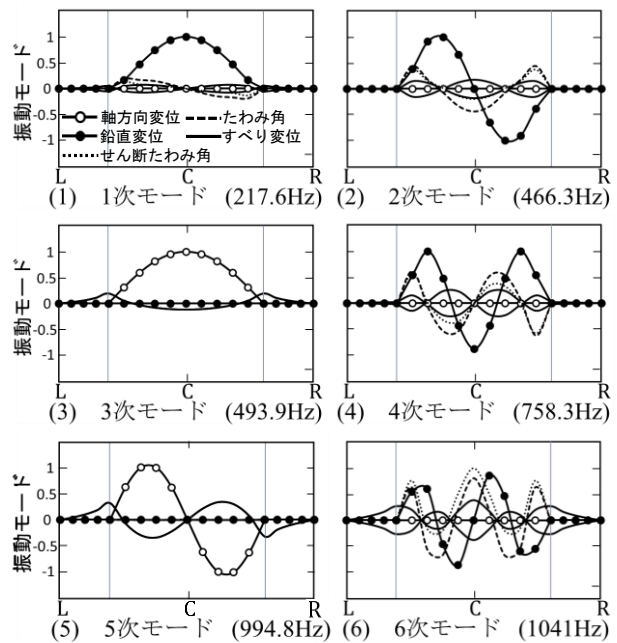


図-6 ティモシェンコ梁 振動モード

($K_b = 10^1 \text{ N/mm}^3$)

振動数が小さく得られるが、鉛直たわみ変位の1次モード、2次モード、3次モードが卓越する固有振動数で比較すると、それぞれ $223.1/326.7 \approx 0.683$, $474.4/800.4 \approx 0.593$, $770.9/1363 \approx 0.566$ となり、高次モードで振動の波長が短いと、せん断変形の影響が大きくなることが分かる。また、図-5の振動モードにおけるたわみ角とせん断たわみ角のモードの割合から、振動モードが高次になるほどせん断たわみ角の影響が大きくなることが示される。

4.3 付着係数の影響について

付着係数を解析パラメータとしてティモシェンコ梁の自由振動解析を行った。図-5に示した完全付着に対応する付着係数 $K_b = 10^5 \text{ N/mm}^3$ に追加して、 10^1 N/mm^3 を仮定した解析結果を図-6に、 10^{-3} N/mm^3 とした場合を図-7に示す。図-6は、完全付着とアンボンドの中間の場合の挙動、図-7はアンボンドの場合の挙動に対応する。

これら3つの図から、同じ卓越振動モードで比較する。鉛直たわみ変位の1次モード、2次モード、3次モードが卓越するモードは、それぞれ図-5、図-6、図-7の(1)、図-5、図-6、図-7の(2)、図-5、図-6の(4)、図-7の(6)になる。これらを比較すると、付着係数が小さくなるに従い固有振動数が小さくなることや、付着すべりのモードが大きくなることが示されている。材軸変形が卓越する図-5、図-6、図-7の(3)で比較すると、付着係数の影響による振動数、振動モードの違いが大きく表れる。図-6(付着性状が中間の値のとき)で、柱との接合部分でのすべり変位が若干現れることは特徴的である。図-6の(5)、(6)でもその特徴がみられる。アンボンドとみなせる場合の付着すべり変位のモードが卓越する図-

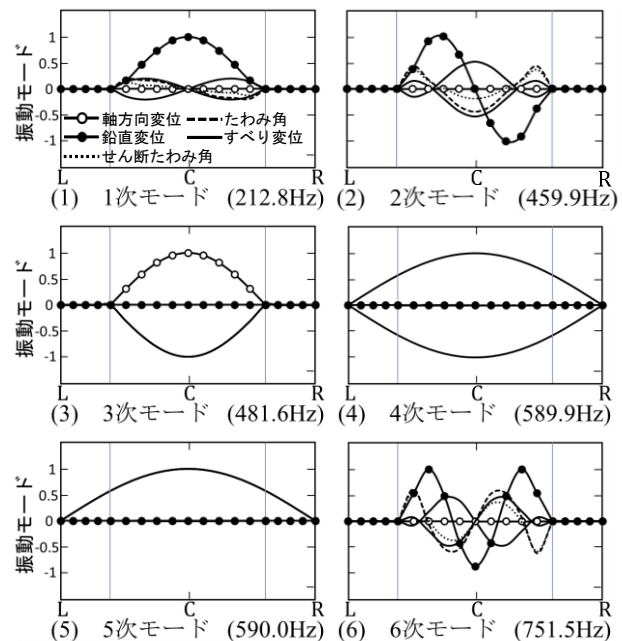


図-7 ティモシェンコ梁 振動モード

($K_b = 10^{-3} \text{ N/mm}^3$)

7(4)、(5)を除くと、図-5、図-7では、振動モードにおいて柱部分における付着すべりは表れていない。

図-7の4次モード、5次モードは、付着すべりが卓越するモードで、4次は上端と下端の補強材の付着すべりが逆位相、5次は同位相となるモードである。

5. 時刻歴応答解析

5.1 入力波と解析方法

対象モデルの振動性状について検証するために、鉛直方向の時刻歴加加速度を入力波とした応答解析を行った。

本研究では、周波数成分に特徴を持たせないホワイトノイズを用いた。応答性状の比較を明確にするために弾性範囲を対象としたものとしては大きめではあるが、加速度の最大振幅が $\pm 980\text{cm/s}^2$ になるホワイトノイズを作成し、それに重力加速度を作用させるために 980cm/s^2 を加えて入力波とした。つまり、振幅が $0\sim 2\text{G}$ の範囲となる時刻歴加速度となる。

時刻歴解析では、平均加速度法を採用し、時間刻みを $1.0\times 10^{-5}\text{s}$ とした。解析の最初に、一定の加速度増分となるように 980cm/s^2 まで増加させ、その後 980cm/s^2 で一定とした解析時間を設けた後に、ホワイトノイズを入力することにより、衝撃的な応答を含まないようにした。

5.2 解析モデル

解析モデルについては、3.の図-2 と表-1 で示したものと同様である。解析に用いた付着係数は、 10^5N/mm^3 、 10^1N/mm^3 、 10^{-3}N/mm^3 を採用した。減衰については、モード減衰を基本に解析を行うこととし、すべてのモードに対して粘性減衰定数として 3%を仮定した。

5.3 セン断変形の影響について

図-8 に、せん断変形考慮の有無に関する比較を行う。スパン中央の鉛直方向変位の時刻歴で、付着係数は $K_b=10^5\text{N/mm}^3$ とした結果を示す。

両モデルとも図-4、図-5 に示した、1 次固有振動数が卓越する振動であり、変位振幅は非常に小さい範囲の振動にはなっているものの、せん断変形の考慮により振動数や振幅が異なる様子が分かる。図中には、重力加速度による変位を示している。せん断変形の考慮により、最大変位及び振動の振幅は約 2 倍になっている。

5.4 付着係数の影響について

図-9 にティモシェンコ梁を対象に、各付着係数における動的応答の比較について示した。1 次振動数の振動が卓越しており、付着係数が小さいほど振動数が小さくはなっているが、この図からは大きな違いとしては判別できない程度である。付着係数の影響により、付着係数が 10^5N/mm^3 の場合に対して、 10^1N/mm^3 、 10^{-3}N/mm^3 の場合における最大変位はそれぞれ約 1.1 倍、1.2 倍、振動の振幅はそれぞれ約 1.2 倍、1.4 倍になっている。

5.5 付着すべりに伴う減衰の影響について

アンボンド PC 鋼材を使用した減衰性能について検討する。本論文における解析モデルは、アンボンド PC をモデルとしたものではないが、ここでは、付着すべりによる減衰性能の効果について考察する目的として、同じ解析モデルを用いて解析を行うこととした。文献 3)において、実験の範囲では、補強材の付着に関わる単位面積及び単位長さあたりの粘性減衰係数として、最大で $1.50\times 10^{-2}\text{N}\cdot\text{s/mm/mm}^2$ に相当することが示されている。本研究では、表-2 に示すように、その値を用いた場合

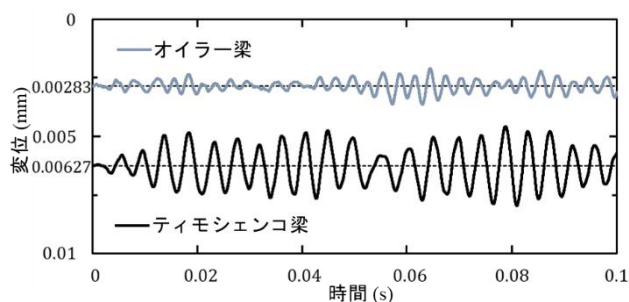


図-8 梁中央の動的応答 セン断変形考慮有無の比較

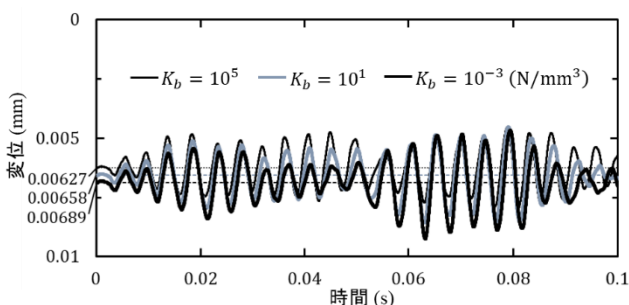


図-9 梁中央の動的応答 各付着係数の比較

表-2 解析ケース

	付着状態 ・ 減衰	付着すべりに関わる 表面積あたりの減衰係数 $C_{bsl}(\text{N}\cdot\text{s/mm/mm}^2)$
Case1		0
Case2-1	アンボンド相当 $K_b = 10^{-3}\text{N/mm}^3$ ・ モード減衰 減衰定数 $\eta = 0.03$	3.75×10^{-4}
Case2-2		7.50×10^{-4}
Case2-3		1.50×10^{-3}
Case2-4		3.75×10^{-3}
Case2-5		7.50×10^{-3}
Case2-6		1.50×10^{-2}

を Case2-6 として Case2-6 を $1/40$ 、 $1/20$ 、 $1/10$ 、 $1/4$ 、 $1/2$ とした値を用いた場合を、Case2-1、2-2、2-3、2-4、2-5、 $C_{bsl}=0$ の場合を Case1 として時刻歴応答解析を行った。

尚、付着係数が大きい場合には付着すべりによる減衰の影響が小さくなるため、ここでは、アンボンドに相当する付着係数 $K_b=10^{-3}\text{N/mm}^3$ とした結果を示す。

図-10 に、Case1 と Case 2-1～2-6 までの時刻歴応答を示す。時刻歴応答性状については、大きな違いは見られないが、付着すべりによる減衰係数が大きくなるほど振幅が小さくなることが分かる。表-3 には最大応答変位と振動の最大振幅の Case1 に対する低減率を示す。本解析例では、応答変位については最大で 7%程度、振幅については最大で 28%程度の低減効果があることが分かる。

図-11 では付着すべりの減衰係数による最大応答変位と振動の最大振幅の Case1 に対する応答低減率の推移を示している。減衰係数が大きいほど応答低減率が増加するが、減衰係数が大きくなるに従い、応答低減効果は

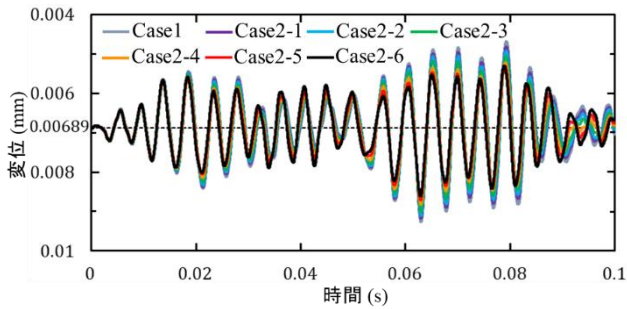


図-10 梁中央の動的応答 各解析ケースによる比較

表-3 各解析ケースの最大応答、
最大振幅と Case1 に対する低減率

	最大応答 (mm)	最大振幅 (mm)	Case1に対する低減率(%)	
			最大応答	最大振幅
Case1	0.00926	0.00237	-	-
Case2-1	0.00918	0.00229	0.90	3.53
Case2-2	0.00911	0.00222	1.68	6.55
Case2-3	0.00900	0.00211	2.84	11.09
Case2-4	0.00883	0.00194	4.65	18.13
Case2-5	0.00871	0.00182	6.00	23.43
Case2-6	0.00861	0.00172	7.08	27.64

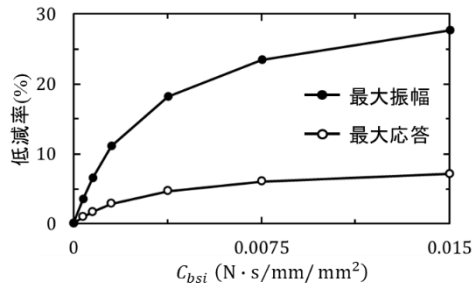


図-11 付着すべりの減衰係数 C_{bsi} による最大応答、
最大振幅の Case1 に対する低減率の推移

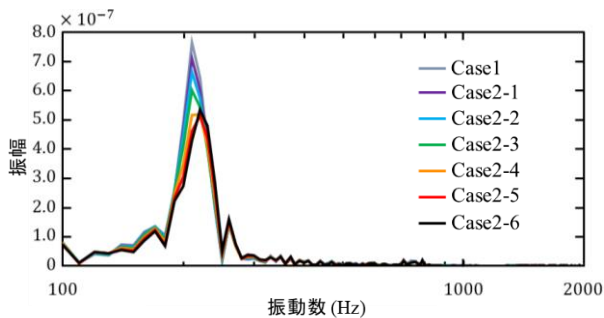


図-12 時刻歴応答変位のフーリエ変換

緩やかになることが分かる。したがって、これ以上に粘性減衰係数を増加させても、応答低減の効果は大きく変化しないと予想される。

図-12 に、時刻歴応答変位のフーリエ変換を示す。1 次振動に相当する振動数で卓越するが、付着すべりの減衰係数が大きくなるほどピークの値が小さくなり、ピークとなる振動数成分に対して、最大で 30% 程度低減している。また、卓越振動数以外の振動成分については、本解析の範囲では違いが小さいことが分かる。

6. まとめ

本論文では、補強材の付着すべりとティモシェンコの仮定によるせん断変形の影響を考慮したコンクリート梁モデルの線形範囲の動的応答について解析モデルの開発と解析例による振動性状の把握を試みた。

- (1) 補強材の付着すべり及びせん断変形を考慮した解析モデルを設定し、それらが固有振動数や時刻歴応答性状に及ぼす影響について示した。
- (2) 付着性状について完全付着に対応する挙動からアンボンドに対応する挙動まで設定した解析例により、付着係数による振動性状の変化について示した。
- (3) 付着粘性減衰の影響による最大応答変位、振幅に關して低減効果の性状について示した。

参考文献

- 1) 池上千優, 越川武晃, 北野敦則, 佐藤良介: 緊張力変動抑制装置を用いたアンボンド PCaPC 圧着骨組の耐震性能, コンクリート工学年次論文集, Vol.46, No.2, pp.463-468, 2024
- 2) 森高英夫, 鈴木計夫, 辻英一, 松谷輝雄, ほか: アンボンド PC 鋼材の減衰性能の利用に関する研究 (その 1) 研究目的と実験計画概要, 日本建築学会学術講演梗概集 (関東), 23471, pp.941-942, 2001.9
- 3) 藤井 睦, 鈴木計夫, 松谷輝雄, 森高英夫, ほか: アンボンド PC 鋼材の減衰性能の利用に関する研究 (その 2) 実験結果と考察, 日本建築学会学術講演梗概集 (関東), 23472, pp.943-944, 2001.9
- 4) 井上圭一, 菊地優, 上田正生: 補強材の付着すべりを考慮したコンクリート梁部材の自由振動解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol.69, No.580, pp.77-84, 2004.6
- 5) 井上圭一, 菊地優, 上田正生: 補強材の付着すべりを考慮したコンクリート梁部材の動的応答解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 20184, pp.367-368, 2004.8
- 6) 大島麻悠, 越川武晃, 上田正生, 菊地優: 補強材の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁・柱部材の動的非線形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.81, pp.151-154, 2008.6
- 7) 井上圭一, 菊地優, 上田正生: 補強材の付着すべりを考慮したコンクリート梁部材の自由振動解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.76, pp.119-124, 2003.6
- 8) 日本建築学会: 鉄筋コンクリート構造計算基準・同解説, pp.466,472, 2018