

論文 強度と靱性能を保証する変位型 RC 塑性ヒンジ要素の離散化法

堀川 真之*1

要旨：ポストピークを含む完全な応答を簡易かつ高精度に予測できる強力な変位型骨組要素の開発を目的として、局所応答をも適切に評価可能な塑性ヒンジ離散化法を提示する。まず、理論的な評価局面から、ヒンジ領域にわたる強度と靱性は正規化された骨組要素によって唯一適切に評価されることを論述する。次に、提案手法を検証するため、主筋の抜け出し、テンションシフト、P-Δ効果の影響を実験値から極力排除できる対象実験を選択する。最後に、検証を試みるが、その有効性を示すため、複数の代表的な拘束効果モデルとの比較を行う。本論文の成果によって、性能設計における正規化の重要性が改めて強調される。

キーワード：塑性ヒンジ、曲げ耐力、回転角、ポストピーク、正規化、有限要素解析

1. はじめに

告示では、極めて稀に発生する地震動によって建築物が倒壊、崩壊しないことを確かめることとされている。このため、層と部材の塑性率が規定されており、後者は曲げヒンジ領域の塑性回転角によって代表される¹⁾。このようなヒンジの回転角は、橋梁構造物をはじめとする土木分野のみならず、ACI318をはじめ国外の設計コードにおいても極めて重要な照査パラメータである²⁾。

筆者は、性能設計に資する数値解析技術への貢献として、これまで正規化手法の開発を行ってきた^{3,4)}。図-1にその成果を抜粋して示す。なお、詳細は文献を参照されたい。要約すると、軸力比 0.3 を一定に受ける鉄筋コンクリート（以下、RC）片持ち柱に対して、2要素に分割した変位型骨組要素の全体応答は、脚部要素の寸法、すなわち塑性ヒンジ長さ（以下、 L_p ）に依存しない客観的な応答を与える（図-1(a)）。定量的には、 L_p を 0.5D から 2.0D の範囲で図のように変化させた各特性点の変動係数は 10%を越えないことを解明した⁴⁾。しかしながら、図-1(b)に示すように、 L_p に分割した脚部要素の局所応答は非客観的な応答を与え、寸法依存性が現われる。このような現状は、応力型に対する最新の研究成果でも指摘されており⁵⁾、選択する積分則に極めて敏感である。よって、両定式化において上述した塑性回転角により評価される損傷量を正確に予測することは困難である。

本論文では、図-1(b)に示す課題を克服するため、局所応答をも高精度に予測できる変位型骨組要素を開発する。第2章では有限要素定式化の観点から回転角の評価プロセスを示し、第3章にて数値上の局所化問題と関連付けた考察を展開しながら、変位型に対する塑性ヒンジ要素の離散化法を明らかにする。続いて、第4章では、離散化法を正確に検証するため、解析対象試験体の選定

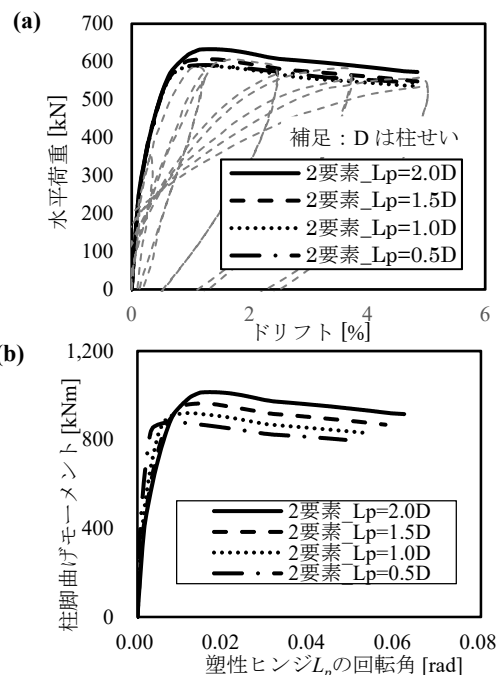


図-1 正規化した変位型骨組要素の全体・局所応答⁴⁾

理由を詳述する。最後に、提案手法を具体的に要約するとともに（第5章）、その有効性を考察する（第6,7章）。なお、解析には汎用コード DIANA10.6を使用する。

2. 変位型定式における回転角の評価局面

図-2に既報³⁾で詳述した単純支持梁の自由度と切断面に作用する変形および応力状態を示す。この図に従い、回転角の評価プロセスを示すことにする。図より、任意断面における変形ベクトル \mathbf{e} は、次式により表現できる。

$$\mathbf{e}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a(x) \\ u_t(x) \end{Bmatrix} = [\varepsilon_a(x) \quad \varphi(x)]^T \quad (1)$$

*1 日本大学 工学部建築学科専任講師 博士（工学）（正会員）

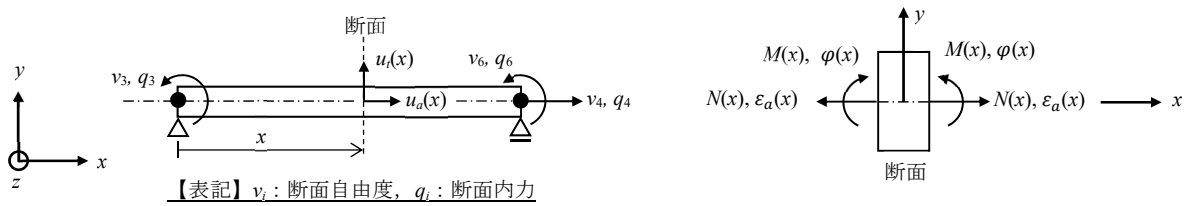


図-2 単純支持梁の自由度と断面に作用する変形と応力³⁾

ここで、 $u_a(x)$ は軸変位ベクトル、 $u_t(x)$ は横変位ベクトルである。式(1)は、ひずみ-変位マトリクス $\mathbf{B}(x)$ を用いて、次のように整理される。

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{v} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{B}(x)$ は左端からの距離 x に関する 1 次および 2 次の微分を含む演算子である。 \mathbf{v} は要素断面の変形ベクトルである。要素の回転角は、式(3)のように表現される。

$$\partial\theta = \int_0^L \mathbf{B}(x) \partial\mathbf{v} dx \approx \sum_i^{N_p} \mathbf{B}(x_i) w_i L \partial\mathbf{v} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{B}(x_i) \partial\mathbf{v}$ は積分点*i*で評価される曲率増分であり、積分点の支配長さ $w_i L$ にわたり一定である。つまり、回転角増分 $\partial\theta$ は、各積分点の支配長さあたりで近似された後、要素長さに関して総和され、1 つの要素にわたり一定の回転角場が形成される。

3. 局所化の理論的考察と塑性ヒンジ離散化法の提案

Calabrese et al.⁶⁾は、*Opensees* を用いて変位型骨組要素における積分点断面の曲率応答を観察した。図-3 に解析結果を引用する。脚部要素、すなわち塑性ヒンジ要素内部には 2 つの積分点断面 (2 点 Gauss-Legendre 積分則) が設置された。また、圧縮側コンクリートの構成則には Kent & Park モデルが使用され、Mander の手法によって拘束効果による強度上昇が適切にモデル化されている。なお、引張側コンクリートの抵抗は無視されている。図から明らかなように、変位法に基づく有限要素定式を採用すると、最下部積分点で除荷 (ひずみの局所化) が生じる。ここで、式(3)により回転角増分を評価すると、

$$\partial\theta \approx 0.57735L[\mathbf{B}(x_1) + \mathbf{B}(x_2)] \partial\mathbf{v} \quad (4)$$

ここで、2 つの積分点の重み係数は等しく $w_1 = w_2 = 0.57735 \dots$ である⁷⁾。よって、積分点の支配長さも 2 つの積分点断面で等しい。また、 $\partial\mathbf{v}$ は変形増分である。 $i = 1$ を最下部積分点とすると、図-3 は $i = 1$ の積分点における曲率、すなわち、 $\mathbf{B}(x_1) \partial\mathbf{v}$ が除荷していることを意味し、式(4)より近似されるヒンジ要素の回転角増分は実応答を大きく過小評価する。この問題を解決するためには、 $i = 1$ の積分点でのひずみの局所化を回避する必要がある。その手段として適切な正則化を施す方法が考えられる。以上の考察と既報³⁾を踏まえ、提案する変位型 RC 塑性ヒンジ要素の離散化法は、次のように要約される。

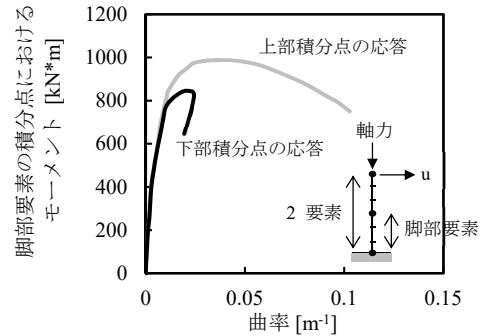


図-3 脚部要素内部の積分点断面における曲率応答⁶⁾

- ・ 局所化を回避するため、正則化を適用する。
 - ・ せん断スパン長さにわたり 2 要素に分割する。
 - ・ 端部要素の長さは、 L_p に対応させて分割する。
- なお、 L_p は回転角の評価区間が実験の検証時と実務で異なるため、実状に応じて次のように取り扱う必要がある。
- ・ 実験を検証する場合、回転角を求めた計測区間 (スタブ表面から任意の柱高さ) に対応させる。
 - ・ 実務の場合、既往の経験式により算出されたヒンジ長さに対応させ、当該要素の回転角を評価する¹⁾。

4. 検証実験の選定

4.1 選定方針




提案を検証するため、適切な実験を既往の研究から選択する。RC 柱の実応答を再現するには、ヒンジ要素について、①RC の曲げ応答、②テンションシフト、③主筋の抜け出し、④P- Δ 効果を適切に考慮する必要がある。前章で述べたように、本論文は、①RC の曲げ応答に主眼を置いている。よって、考察段階において、②~④の影響を極力排除したい。そのような視点から、Saatcioglu と Gira⁸⁾の実験シリーズを選択した。概要は次の通りである。

4.2 選定した実験の概要

表-1 および図-4 に実験概要を示す。せん断スパン比は 4.7 であり、軸力比は比較的高く設定され、BG-3 と BG-8 を除いて終局強度指針から求めた釣合い軸力を越えている。脚部の回転角は、柱せい $D (=350\text{mm})$ に等しい区間で計測された。そして、P- Δ 効果は無視した荷重-ドリフト関係 (全体応答) とモーメント-回転角 (局所応答) が示され、後者については、全回転角から主筋の抜け出し成分が除去されている。なお、著者は、最終破壊状況から判断して L_p を $1.0D$ と結論付けている。

表-1 解析対象試験体一覧, Saatcioglu & Gira (1999) ⁸⁾

試験体	L (mm)	D (mm)	f_c (MPa)	f_{yt} (MPa)	$f_{y\ell}$ (MPa)	η	ρ_t	ρ_ℓ	配筋 タイプ	破壊 モード	計測区間 (mm)	L_s (mm)
BG-1	1,645	350	34.0	455.6	570	0.43	0.010	0.020	A	CB	1.00D	0.33D
BG-2	1,645	350	34.0	455.6	570	0.43	0.020	0.020	A	CB	1.00D	0.0
BG-3	1,645	350	34.0	455.6	570	0.20	0.020	0.020	A	C	1.00D	0.0
BG-4	1,645	350	34.0	455.6	570	0.46	0.013	0.029	B	CB	1.00D	0.19D
BG-5	1,645	350	34.0	455.6	570	0.46	0.027	0.029	B	C	1.00D	0.0
BG-6	1,645	350	34.0	477.8	570	0.46	0.027	0.023	C	C	1.00D	0.0
BG-7	1,645	350	34.0	455.6	580	0.46	0.013	0.029	B	CB	1.00D	0.22D
BG-8	1,645	350	34.0	455.6	580	0.23	0.013	0.029	B	C	1.00D	0.17D

配筋 タイプ			
-----------	---	---	---

【表記】 L : せん断スパン長さ, D : 柱せい, f_c : 圧縮強度, f_{yt} : 主筋降伏強度, $f_{y\ell}$: 横補強筋降伏強度, η : 軸力比, ρ_t : 主筋比, ρ_ℓ : 横補強筋体積比, CB: 曲げ圧縮破壊後の主筋の座屈, C: 曲げ圧縮破壊, L_s : 塑性ヒンジ長さに占めるテンションシフトの寄与分

4.3. テンションシフトの寄与分と選定の妥当性

前節までを要約すると、全体応答について④の影響、局所応答について③と④の影響を排除できる。残りは②テンションシフトの影響を排除できるか否かである。ここで、②の影響度を式(5)に示すように塑性ヒンジ長さ L_p に占める割合として評価できるものと仮定し、残された課題を整理する。Ning と Li⁹⁾は、 L_p が図-5 に示す機構を重ね合わせて評価できるものとし、確率論に基づき塑性ヒンジ予測モデルを開発した。本論文の仮定は、この成果に基づくものであり、 L_p は次のように表現される。

$$L_p = L_f + L_s + L_l \quad (5)$$

ここで、 L_f は RC による曲げの寄与分、 L_s はテンションシフトによる寄与分、 L_l は抜け出しによる寄与分である。Park と Paulay¹⁰⁾によれば、 L_s は次式により表現される。

$$L_s = \left[\cot\theta - \frac{v}{2}(\cot\theta + \cot\varphi) \right] H \geq 0 \quad (6)$$

ここで、 θ は斜めひび割れの傾斜、 φ は横補強筋の傾斜、 v はせん断応答に対するせん断補強筋強度の比、 H は柱せいである。今、選定した実験において、 $L_p=1.0D$ と断定されているから、脚部の $b: 350\text{mm} \times L_p: 350\text{mm}$ の範囲にひび割れが集中したものと考えられる。そこで、斜めひび割れの発生による傾斜角 θ は対角方向の 45° を仮定し、配筋から $\varphi=90^\circ$ より、式(6)は次式のように簡略化できる。

$$L_s \approx (1 - v/2)D \geq 0 \quad (7)$$

ここで、 v について、せん断応答は実験値正側の最大値を断面積 bd で除し、補強筋強度を $\rho_w \sigma_{wy}$ より求めると、式(7)は表-1 の L_s 欄となる。BG-1, 4, 7, 8 は若干高い値を示すが、それ以外のシリーズ (BG-2, 3, 5, 6) にて L_s は十分に小さい。後者を対象に、②の寄与分を無視すると、

$$L_p \approx L_f + L_l \quad (8)$$

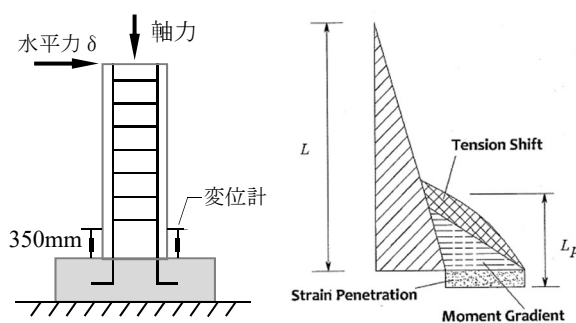


図-4 実験概要

図-5 ヒンジの抵抗機構⁹⁾

ここで、回転角の実験的評価において主筋の抜け出し成分は除去されている。よって、最終的に、局所応答の評価においては $L_p \approx L_f$ が成立し、式(3)のアウトプットを直接的に実験値と比較できる。他方、全体応答については、実験値に①と③の成分が含まれる。以上より、文献8は、検証試験体として概ね妥当であると判断できる。

5. 解析概要

BG-2, 3, 5, 6 シリーズについては、②の影響を無視できるため、終局状態においても平面保持の仮定が成立する。よって、Euler-Bernoulli 理論に基づく梁要素を選択する。第3章で示した離散化法に従い概要を要約すると、

- ・ 2 節点梁要素に対して既報で提案した正則化手法を適用する。詳細は文献3, 4を参照されたい。
- ・ せん断スパン $L=1,645\text{mm}$ を2つの要素に分割し、脚部要素の長さは計測区間の 350mm に設定する。

また、図-6 に境界条件、荷重条件および要素分割図を示す。塑性ヒンジ要素について補足すると、3点 Newton-Cotes 則 (Simpson 則とも呼ぶ) の適用により³⁾、第一積分点の重み係数は $w_1=1/6$ となり、等価長さ $w_1 L=58.3[\text{mm}]$ が導かれる。これを用いて、圧縮側構成則の正則化プロ

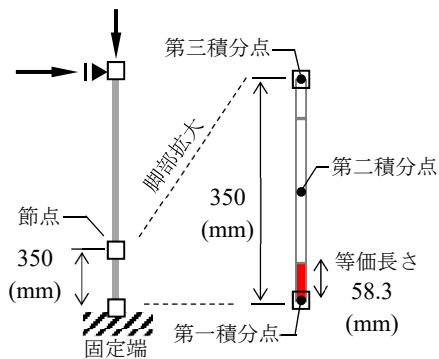


図-6 境界・荷重条件，要素分割図

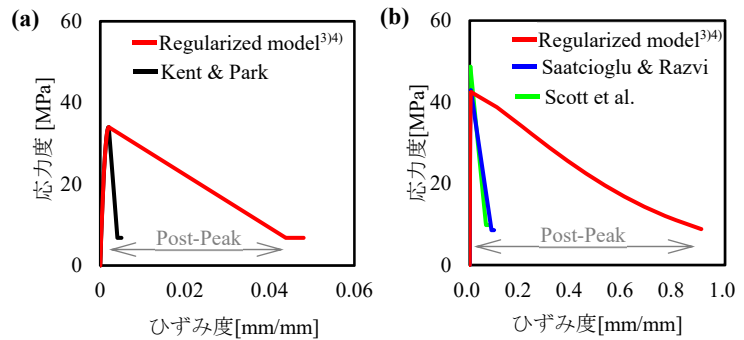


図-7 BG-6 塑性ヒンジに対する圧縮側構成則：(a)かぶり，(b)コア

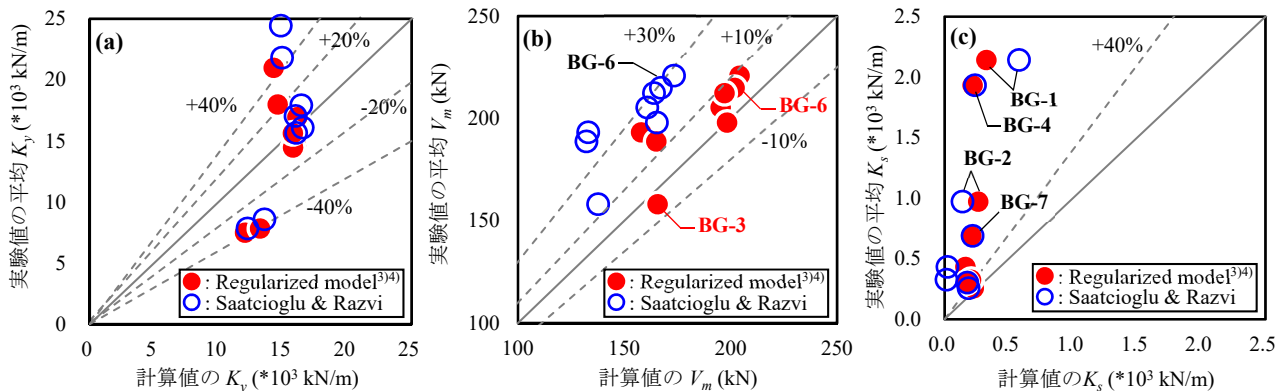


図-8 全体応答に対する正則化モデルと Saatcioglu & Razvi モデル（従来モデル）の精度比較

セスを実行する³⁾⁴⁾。図-7に仮定した塑性ヒンジ要素に対する応力-ひずみ関係を示す。ここでは、代表してBG-6を示す。比較のための従来モデルについて、かぶりは全てkent & Parkモデルが割り当てられ、コアは2ケースを設定した；Scottら¹¹⁾のモデルと Saatciogluと Razvi¹²⁾のモデルである。なお、正則化モデルは、かぶりとコアのそれぞれに対して、赤実線を入力する。本論文で採用する正則化手法の汎用性は、特に勾配の設定方法とその影響について文献3に、要素長さとその不均一性が応答に及ぼす関係等は文献4で詳しく示されている。また、コンクリートの引張抵抗は無視し、主筋はbi-linearとし、2次剛性は初期剛性の1/100とし全ケースで共通とした。

6. 特性点の比較に基づく考察

図-8に全体応答の解析結果を示す。また、図-9に考察のために導入した特性点の評価方法を示す：

- 理論降伏応力に対する割線剛性： $K_y = V_y / \delta_y$ を導入する。ここで、 V_y は主筋が引張 or 圧縮降伏した初Step時の作用せん断力、 δ_y は V_y に対する変位である。実験値は、計算値 $V_{y,sim}$ に対する実測変位 $\delta_{y,obs}$ を用いて評価する。
- 部材強度を評価するため、最大ベースシア： V_m を諸量の1つに選択する。
- ポストピークの客観性を評価するため、軟化勾配 K_s を導入する：ここで、 δ_u は実験で規定された最終変

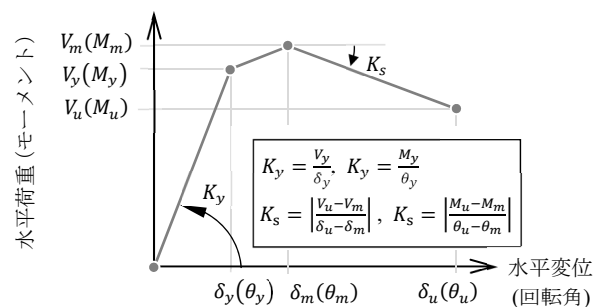


図-9 特性点の評価方法

位である。なお、局所応答を評価する諸量は、全体応答と同様である。せん断力は曲げモーメントに置き換えられ、水平変位は計測区間の回転角と見なすことにした。以上を踏まえ、図-8を考察する。同図は、全体応答の比較である。よって、②テンションシフトと④P-Δ効果の影響は排除されるが、③抜け出し成分が含まれている点に留意する。なお、縦軸の実験値は正負の平均とした。図-8(a)より、降伏時剛性は、両者に大きな違いはなく、±40%の精度で予測できる。図-8(b)は、部材強度の比較であるが、正則化により予測精度は大幅に改善される。具体的には、従来モデルは強度を概ね30%過小に評価するが、正則化モデルは少なくとも2点を除いて+10%を大きく上回っていない。この要因は、最大耐力時の断面内部を観察すると明らかである(図-10)。従来モデルでは、ほぼ柱幅全域にわたり圧縮ひずみが作用しており、

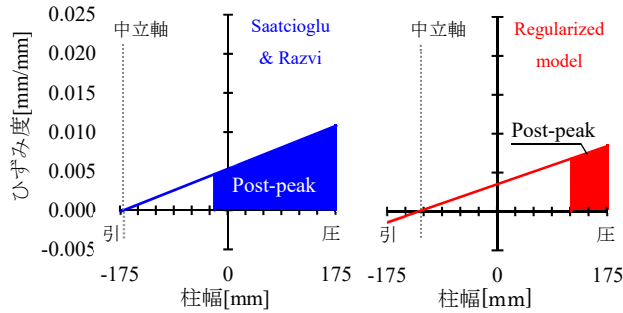


図-10 最大耐力時のヒンジ要素のひずみ分布(BG-6)

中立軸が断面縁に存在するため、コンクリートの圧縮特性が強く反映される。一方、正則化モデルの場合、中立軸は比較して断面内部に存在し、引張鉄筋の抵抗が残されている。図のハッチ部は、図-7に示した関係のうち、ポストピーク域を示したものである。従来モデルは、最大耐力時に断面の多くが圧縮軟化を示すため、過少なストレスブロックによる曲げ抵抗を誘発し、誤った部材強度の予測をもたらす。図-8(c)に軟化勾配の比較を示す。図より、BG-1,2,4,7試験体について、予測応答はいずれも実応答よりポストピークを緩やかに予測している。これは、表-1に示すように、これら4つの試験体が曲げ圧縮後に座屈(破壊モード:CB)を示したためである。正則化の概念をベースに終局時の座屈を捉えようとする試みは、応力型骨組要素に対してすでに国外で開発が進められており⁵⁾¹³⁾、今後、本研究で扱う変位型へ取り込むことにより改善できるものと考えている。次に、残された試験体について考察を進める。これらは、全て曲げ圧縮破壊を示している(破壊モード:C)。図-8(c)のグラフ軸を縮尺して、図-11に示す。従来モデルは、BG-5,6試験体に対して極めて緩やかなポストピークを与え、曲げ圧縮軟化挙動を捉えることはできない。しかしながら、正則化モデルはこの点を大幅に改善でき(図中の矢印を参照)、ポストピークの適切な応答予測に大きく貢献する。このことを材料応答に着目して考察する。図-12にBG-6の材料応答を示す。圧縮強度を迎えた後、従来モデルによるコアコンクリートの抵抗は早期に低下し、その抵抗を徐々に失う。よって、ピーク後は鉄筋の抵抗が支配的となりbi-linearの2次剛性に沿う誤ったポストピーク挙動が示される。他方、正則化モデルでは靱性に富むコアコンクリートの抵抗が残されており、対応する主筋の引張抵抗も維持されるため、ドリフトの進行とともにコンクリートの圧縮軟化挙動が徐々に表れる(図-14も参照)。図-13に局所応答の結果を示す。局所応答は、4.3節の考察により、解析と実験を直接比較できる。降伏時剛性は、BG-6,7が実応答より剛性が低い点を除いて、概ね±40%の範囲に収まっている(図-13(a))。一部、解析の剛性が高い試験体も確認でき、こ

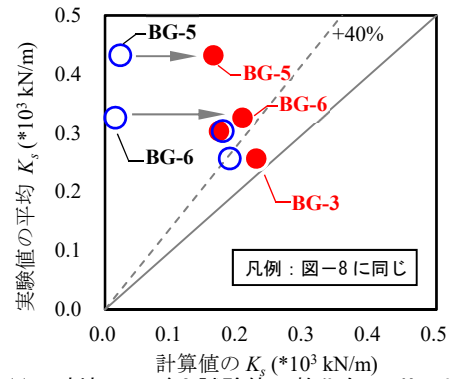


図-11 破壊モードC試験体の軟化勾配 K_s の比較

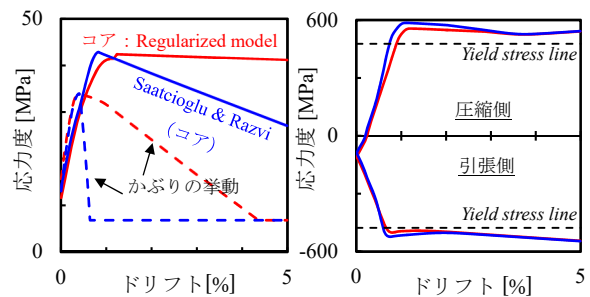


図-12 BG-6の材料応答: 左はコンクリート、右は主筋

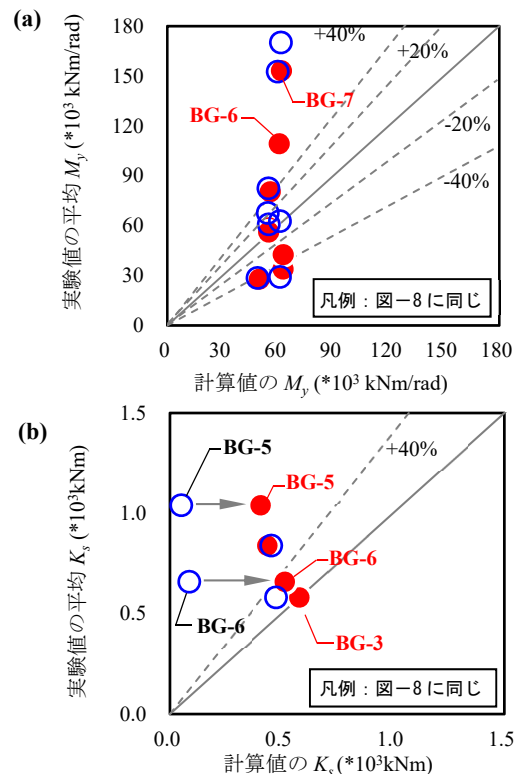


図-13 局所応答に対する精度比較

れは全体応答も同様であることから、結果として実験⁸⁾は抜け出し成分が小さいことを示している。図-13(b)に破壊モードがCの試験体について K_s の精度を示す。提案手法により、BG-5,6の回転角靱性は大幅に改善され、とりわけ4点中2点は+40%以内で予測できる。なお、曲げ強度の精度は図-8(b)と同様であり割愛する。

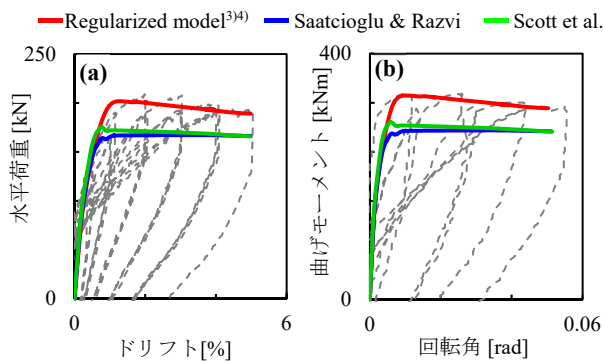


図-14 BG-6に対する予測応答の比較（負側）

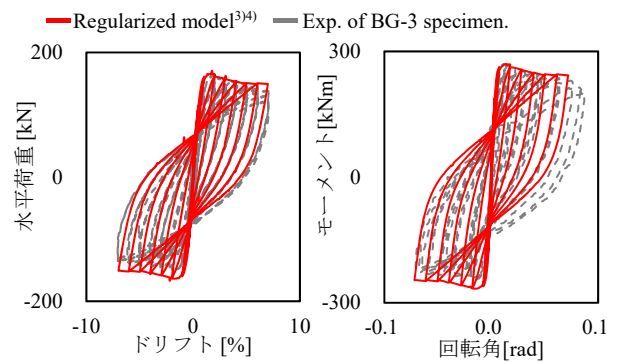


図-15 BG-3に対する正規化モデルの繰返し応答

7. 実験の履歴曲線との比較に基づく検証

ここでは、軟化勾配 K_s の改善が顕著であった BG-6 に対して Pushover の結果 (図-14)、全体を通して最も強度と靱性の予測精度が高かった BG-3 に対して繰返し応答の結果 (図-15) を示す。図-14(a) について補足すると、予測された全体応答 (青実線) は、著者らの解析値⁸⁾と同様の骨格曲線であった点に留意する。図からも明らかのように、正規化モデルは適切に骨格曲線全体を追跡している。局所応答の剛性について、実験値は極めて剛であることが分かる (図-14(b)参照)。この点は、モデル化を改善する前段として、材料特性をはじめとする実験に含まれる不確かさの影響を考慮した分析が必要であると考えている。最後に、繰返しモデルについて、コンクリートの除荷剛性は原点へ指向させ、主筋には Menegotto-Pinto モデルを使用するとともに、入力パラメータは Filippou ら¹⁴⁾の成果に基づき同値とした。図-15より、解析値は除荷・再載荷時の剛性に改善が必要であるものの、履歴を含め強度と靱性を良好に追跡している。

8. まとめ

強度と靱性を保証できる変位型骨組要素を有限要素定式化の観点から考察し、離散化手法を提案・検証した。得られた知見は次の通りである。

- 1) 正規化により断面内のストレスブロックが適切に形成され、部材強度が保証される。
- 2) コアコンクリートが正規化を経てモデル化されると、軟化を含む部材の適切な靱性能が保証される。

謝辞

本研究の遂行にあたり、白井伸明日本大学名誉教授にご助言いただきました。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 日本建築学会：鉄筋コンクリート造建物の靱性保証型耐震設計指針・同解説，第2版，1999。
- 2) 日本コンクリート工学会：非線形動的解析を用いる

RC 構造物の性能評価型耐震設計の現状，2022. 9.

- 3) 堀川真之：拘束効果と積分点の支配長さを考慮した骨組要素の正規化手法，コンクリート工学年次論文集，vol.44, No.2, 85-90, 2022. 7.
- 4) 堀川真之：正規化変位型骨組要素による曲げ圧縮軟化シミュレーション：コンクリート工学におけるシミュレーションの検証と妥当性確認および不確かさ評価に関するシンポジウム論文集，13-20, 2022. 8.
- 5) Pozo, J. D. et al.: Effect of material regularization in plastic hinge integration analysis of slender planar RC walls, *Engineering Structures*, vol.239, 112302, 2021.
- 6) Calabrese, A. et al.: R.: Numerical Issues in Distributed Inelasticity Modeling of RC Frame Elements for Seismic Analysis, *J. Earthq. Eng.*, vol.14, 38-68, 2010.
- 7) Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*. (Second Edition), Prentice-Hall, USA, 2014.
- 8) Saatcioglu, M., and Gira, M.: Confinement of Reinforced Concrete Columns with Welded Reinforcement Grids, *ACI Struct. J.*, 29-39, 1999.
- 9) Ning, C. L., and Li, B.: Probabilistic Approach for Estimating Plastic Hinge Length of Reinforced Concrete Columns, *J. Struct. Eng.*, Vol.142(3), 1-15, 2016.
- 10) Park, R., and Paulay, T.: *Reinforced Concrete Structures*, Wiley, New York, 1975.
- 11) Scott, B. D., R. Park, and M. J. N. Priestley: Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates, *ACI Struct. J.*, 13-27, 1982.
- 12) Saatcioglu, M., and Razvi, S. R.: Strength and Ductility of Confined Concrete, *J. Struct. Eng.*, Vol.118(6), 1590-1607, 1992.
- 13) Pugh, J. S., Lowes, L. N., and Lehman, D. E.: Nonlinear line-element modeling of flexural reinforced concrete walls, *Engineering Structures*, vol.104, 174-192, 2015.
- 14) Filippou, F. C., Popov, E. P., and Bertero, V. V.: Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Joints, Report No. UCB/ EERC-83/19, 1983.