

論文 動的な表面の温度変化を対象としたコンクリート内部の非定常温度応力に関する解析

内海 秀幸*1・中澤 健太*2

要旨：日照等の環境条件に由来したコンクリート内部の非定常温度応力評価技術に寄与することを念頭に、平面ひずみ状態を想定した半無限弾性体の表面に周期的な温度変化が生じた場合、また、時間に対して線形的な温度上昇が生じた場合における主応力 $(\sigma_x+\sigma_y)$ に関する解析解を導出した。支配方程式は熱伝導にともなった応力変動によるひずみ速度に関するつり合い式を基礎とし、熱弾性体の適合条件式を考慮することで $(\sigma_x+\sigma_y)$ を未知項とした放物型の偏微分方程式として定式化される。夏季の日照によるコンクリート表面の温度変化を想定した解析例を示し、応力状態が変動する深さについて吟味した。

キーワード：非定常温度応力, 非定常熱伝導, 半無限弾性体, 平面ひずみ, 解析解

1. はじめに

コンクリート工学における温度応力は水和発熱に関連して取りあげられる場合と環境条件に関連して取りあげられる場合に大別される。本研究は環境条件のうち、特に、日照等による表面温度の動的な変化に由来したコンクリート内部の非定常温度応力の評価を対象としたものである。

夏季における日照に由来したコンクリート表面の温度は早朝から昼にかけて 18[°C]程度上昇し、内部と表面との温度差は 1 日のうち 10[°C]以上生じることが把握されており、温度の不均一な分布や拘束状態に由来して内部の応力状態が変動することとなる。このような応力変動は繰り返し荷重としてコンクリートの耐力に影響を及ぼす可能性があり、表面温度の動的な変化にともなうコンクリート内部の応力状態を合理的かつ簡便に評価するための技術は耐久性評価や疲労設計の観点から重要であろう。

さて、一般的に温度応力を数値シミュレーションにより評価するためには、まず温度分布を評価し、その後、得られた温度分布より想定される膨張や収縮に関連した構造解析を実施する複数のステップを経る必要がある。このような温度応力解析に対応したソフトはすでに複数存在しているが、それらは主に離散化を必要とした有限要素法を利用したものであり複雑な形状や境界条件への対応が可能となっているものの、非定常温度応力に関する具体的な数理表現を解析的に明確にしたものではない。

そこで本研究では、熱弾性体の適合条件式²⁾を利用することにより非定常温度応力問題に対する支配方程式を定式化し、平面ひずみ状態を想定した半無限弾性体を対象として表面に周期的な温度変化が生じる場合、また、時間に対して線形的な温度上昇が生じる場合の主応力 $(\sigma_x+\sigma_y)$

に関する解析解を明らかにしたものである。

本研究における支配方程式は熱伝導に由来した応力変動にともなうひずみ速度に関するつり合い式を基礎としており、その形式は $(\sigma_x+\sigma_y)$ を未知項とした放物型の偏微分方程式として定式化される。この支配方程式より導出される解析解は場の弾性的特性であるポアソン比・ヤング率・線膨張係数と熱伝導特性である熱拡散係数の双方を含んでおり、 $(\sigma_x+\sigma_y)$ に対するそれらの影響を直接的に検討可能な新たな形式となっている。

2. 支配方程式の定式化

2.1 解析モデルの設定と基礎式の定義

図-1 に示すように、3 次元で均質かつ等方な半無限弾性体の表面に動的な温度変化が一様に生じている場を想定する。

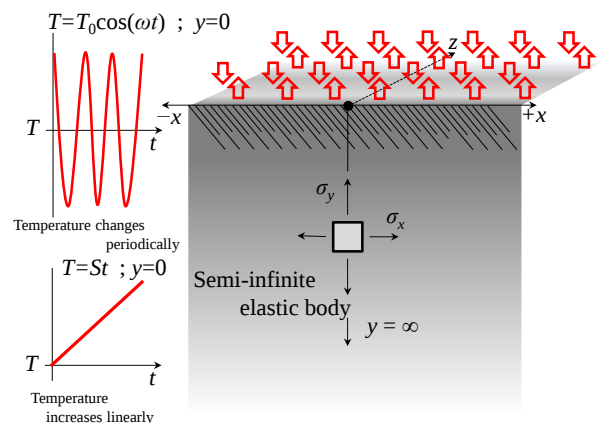


図-1 解析モデルの設定

*1 千葉工業大学 創造工学部都市環境工学科教授 博士（工学）（正会員）

*2 千葉工業大学 大学院 都市環境工学専攻

単位時間当たりの温度変化に対する応力変動は弾性力学に基づけば次式のように表現される。

$$\frac{K}{3} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 t は時間[s], T は温度[°C], K は圧縮率 [$\text{m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$], α は線膨張係数[$1/^\circ\text{C}$]であり、 σ_x , σ_y ならびに σ_z は各方向に対する応力 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$]である。

また、熱伝導を表現するつり合い式は次式のように表される。

$$\frac{1}{\rho C} \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

ここで、 J_x と J_y はそれぞれ x 方向と y 方向の熱流束(ヒートフラックス) [$\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$], C は比熱 [$\text{J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$], ρ は密度 [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]である。なお、問題の設定として表面の温度変化は一様に生じているものとしていることから、式(2)では z 方向成分(奥行き方向)の熱流束 J_z は考慮していない。

式(1)ならびに式(2)より温度変化にともなった応力変動に対する方程式が次式のように成立する。

$$\frac{K}{3} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\alpha}{\rho C} \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) \quad (3)$$

本研究では上式(3)を基礎式と位置づけ、平面ひずみ状態を想定した半無限弾性体の表面に周期的な温度変化が生じる場合、また、時間に対して線形的な温度上昇が生じる場合の非定常温度応力に関する解析解を示す。

さて、Okusa³⁾の取り組みでは式(3)における熱流束(J_x , J_y)を間隙水の流速、応力(σ_x , σ_y , σ_z)を地盤の有効応力として、海底地盤の波浪応答問題に対して同様な形式の式が定義されており、この Okusa の取り組みを着想として著者らは式(3)を定式化した。本研究で取り扱う温度応力問題に対して海底地盤の波浪応答に関する知見を展開できる理由は、熱の作用する弾性体の応力 - ひずみ関係⁴⁾における線膨張係数 α [$1/^\circ\text{C}$]と温度 T [$^\circ\text{C}$]の積である αT が多孔質弾性理論⁵⁾における間隙水圧に相当し、かつ、間隙水の流速ならびにダルシー則が熱伝導場における熱流束とフーリエ則に対応していることに由来する。このように熱弾性理論と多孔質弾性理論の等価性を利用した研究は他にもあり、例えば Cheng, A. H.-D.ら⁶⁾の取り組みでは、熱弾性問題において得られている基本解(Fundamental solution)を多孔質弾性体を対象とした境界要素法での解析に拡張して利用している。すなわち、熱弾性理論と多孔質弾性理論は極めて親和性が高い。

2.2 平面ひずみ状態と熱弾性体に対する適合条件の導入による支配方程式の定式化

平面ひずみ状態での応力に関する条件ならびに弾性体の圧縮率 K はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ K = \frac{3(1-2\nu)}{E} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 E はヤング率 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$], ν はポアソン比[-]である。また、本研究における熱伝導構成則には次式で示されるフーリエ則を用いる。

$$\begin{cases} J_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \\ J_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 κ は熱伝導率 [$\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]である。式(3)に式(4)と(5)を導入することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\alpha E \Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x + \sigma_y) \\ = - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 Ω は熱拡散係数 [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]であり次式で定義される。

$$\Omega = \frac{\kappa}{\rho C} \quad (7)$$

さて、平面ひずみ状態における熱弾性体の適合条件式は次式のように表される(適合条件式の導出は本論末尾の付録または参考文献 2)を参照いただきたい)。

$$\nabla^2 \left((\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\beta_T}{(1-\nu)} T \right) = 0 \quad (8)$$

ここで、 β_T は熱弾性係数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]であり、次式のように定義される⁷⁾。

$$\beta_T = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \quad (9)$$

式(8)より主応力和($\sigma_x + \sigma_y$)と温度 T は平面ひずみ状態において次式の関係が成立することとなる。

$$(\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{\beta_T}{(1-\nu)} T \quad (10)$$

式(6)に式(9)ならびに式(10)を導入することにより、本研究における支配方程式として次式に示す2階の偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial t} = \frac{\Omega(1-\nu)}{(1+\nu)} \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) \quad (11)$$

式(11)の特徴は係数に弾性パラメータであるポアソン比と熱伝導特性を表現する熱拡散係数の双方が含まれていること、また、主応力和($\sigma_x + \sigma_y$)を未知項とした放物型の偏微分方程式として表現されている点である。

上式(11)を1次元で表現すると次式のように表される。

$$\frac{\partial(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial t} = Q^2 \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} \quad (12)$$

ここで、右辺の Q^2 は最終的に解の形式が簡便になることを意図し次式のように設定した。

$$Q^2 = \frac{\Omega(1-\nu)}{(1+\nu)} \quad (13)$$

前述したとおり、式(12)の形式は $(\sigma_x + \sigma_y)$ を未知項とした放物型の偏微分方程式であり、歴史的にこの形式の偏微分方程式に対しては各種の解析解が見いだされている。式(11)を導出するためのフローを図-2に示した。

3. 解析解

3.1 表面に周期的な温度変化が作用する場合

表面に周期的な温度変化が作用する場合、 $t \geq 0$ において温度に関する境界条件は次式のように設定できる。

$$T = T_0 \cos \omega t \quad ; \quad y = 0 \quad (14)$$

$$T = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (15)$$

ここで、 ω は表面に作用する温度変化の角速度 [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$]、 T_0 は表面に作用する温度変化の振幅 [$^{\circ}\text{C}$] である。このような温度に関する境界条件を $(\sigma_x + \sigma_y)$ に対して拡張すると次式のように表現される。

$$(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} T_0 \cos \omega t \quad ; \quad y = 0 \quad (16)$$

$$(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (17)$$

表面である $y=0$ において $\sigma_y=0$ であるから、式(16)における設定は $\cos(\omega t)$ に応じた σ_x に対する応力変動 $(\alpha E T_0 / (1-\nu))$ を表現しており、温度 T_0 における弾性体表面での熱応力と一致している(文献 4)の 401 ページを参照)。

また、無限遠方で温度がゼロとなる式(15)に対応して式(17)の $(\sigma_x + \sigma_y)$ も無限遠方でゼロとなるように設定されている。式(12)に対して式(16), (17)を満たす解は広く知られており次式のように表される^{8),9)}。

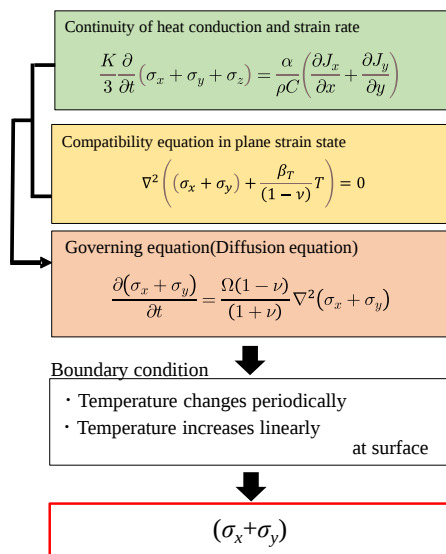


図-2 定式化のフロー

$$(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} T_0 \left[\exp \left(-\frac{y}{Q} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right) \cos \left(\omega t - \frac{y}{Q} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right) \right] \quad (18)$$

上式に含まれる Q は式(13)の定義より次式のように表される。

$$Q = \sqrt{\frac{\Omega(1-\nu)}{(1+\nu)}} \quad (19)$$

ここで、式(18)で表現される $(\sigma_x + \sigma_y)$ が境界条件を充足しているかについて確認しておこう。

まず、 $y=0$ を式(18)に導入するとその形式は式(16)と同じ形式となる。また、深さ方向に無限遠方となる $y \rightarrow \infty$ では式(18)に含まれる $\exp$ に関する項がゼロとなることから、式(18)は無遠方における応力に関する境界条件(式(17))についても充足している。

なお、ポアソン比が $\nu \rightarrow 0$ となる場合において式(18)に含まれる Q は

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} Q = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Omega(1-\nu)}{(1+\nu)}} = \sqrt{\Omega} \quad (20)$$

となり、式(18)は単位温度変化あたりの一次元的な応力変動 $(\alpha E T_0)$ を表現するものとなる。

3.2 表面に時間に対して線形的な温度上昇が作用する場合

表面に時間に対して線形的な温度上昇が生じる場合、 $t \geq 0$ において温度に関する境界条件は次式のように設定できる。

$$T = St \quad ; \quad y = 0 \quad (21)$$

$$T = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (22)$$

ここで、 S は温度上昇速度 [$^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$] である。このような温度に関する境界条件を $(\sigma_x + \sigma_y)$ に対して拡張すると次式のように表現される。

$$(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} St \quad ; \quad y = 0 \quad (23)$$

$$(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (24)$$

ここで、式(23)は式(16)での設定と同様、半無限弾性体の表面において単位温度あたりの応力変動を基準とした設定となっている。

式(12)に対して式(23), (24)を満たす解は次式のように表される¹⁰⁾。

$$(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} St \left[\left[\left(1 + \frac{y^2}{2Q^2 t} \right) \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{Q^2 t}} - \frac{y}{\sqrt{\pi Q^2 t}} \exp \left[-\frac{y^2}{4Q^2 t} \right] \right] \right] \quad (25)$$

4. 解の検証と解析例

4.1 解析モデルの設定

図-1 に示すような半無限弾性体に対して平面ひずみ状態を想定し、その表面に周期的な温度変化が生じる場合、また、時間に対して線形的な温度上昇が生じる場合の非定常温度応力に関する解析例を示す。各解析例とも半無限弾性体には典型的なコンクリートを想定し、その物性については表-1 のように設定した。

周期的な温度変化が生じる場合の解析例において、表面に作用する温度の1周期に要する時間を t_0 [s]として次式のように定義する。

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (26)$$

夏季の日照による温度変化を想定した場合、一般的に日の出から正午にかけて温度が上昇することから、周期的な温度変化が生じる場合の解析では、温度変化が6時間で最大から最小となるように $t_0=4.32 \times 10^4$ [s](12[hour])と設定した。この場合、半無限弾性体の表面には図-3 に示すような温度変化が作用することとなる。

時間に対して線形的な温度上昇が生じる場合の解析例では、文献1)において概ね8時間で18[°C]の温度上昇が生じることが実測データとして示されていることから、その結果を参考に単位時間当たりの温度上昇速度 S [°C・s⁻¹]を次式のように設定した。

$$S = \frac{18[\text{°C}]}{8[\text{h}]} = 2.25 \frac{[\text{°C}]}{[\text{h}]} = 6.25 \times 10^{-4} \frac{[\text{°C}]}{[\text{s}]} \quad (27)$$

4.2 解析例(表面に周期的な温度変化が作用する場合)

図-4、図-5 に各時間における $(\sigma_x + \sigma_y)$ の分布を示す。ここでは $(\sigma_x + \sigma_y)$ を $aET_0/(1-\nu)$ で除すことにより無次元化して表現していることに注意されたい。また、図中の実線は式(18)により計算された結果であり、点線は以下のような3つの手順に基づく段階的な方法により計算された結果である。

- (1) 1次元非定常熱伝導の周期解^{8),9)}より温度分布(各深さでの温度 T)を評価。
- (2) 上記で計算された温度 T より各位置での応力 σ を $\sigma=aET$ により評価。
- (3) 上記(1)(2)のステップを経て計算された σ を σ_y として取り扱い、弾性力学に基づく次式の関係式を利用して σ_x を決定し、 $(\sigma_x + \sigma_y)$ を評価。

$$\sigma_x = \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \sigma_y \quad ; \quad y > 0 \quad (28)$$

このようにして段階的に得られた結果は厳密な解ではないものの境界条件(式(16)(17))を充足した解を与えており、本研究により表現された結果の妥当性を検証する観点から併せて表現した。

図-4、図-5において、式(18)により計算された結果と前述した段階的な計算により得られた結果はほぼ同様な傾向を示している。また、各結果とも $y=0.4$ [m]付近で無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の値はほぼゼロとなっており、表面の温度変化に由来した応力変動の範囲は概ね表面より0.4[m]付近までに限定されることが推察される。

興味深い結果は図-4における $t=3$ [hour]での結果(黒の実線)であろう。この $t=3$ [hour]での結果は表面における温度がゼロの場合に相当するが、無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の最大値(圧縮)が $y=0.06$ [m]程度のところで生じている。このような結果は、式(18)が周期的な表面温度の変化に対応した動的な解であることに由来している。

さらに、図-6には図-4と図-5の結果に対応した各深さでの無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の時刻歴変動を示した。この図-6では表面温度が最大温度から最小温度に変動する0~6時間のプロセスを表現している。

図-6より、深い位置ほど無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の変動量が小さくなる傾向にあることがわかる。深さが $y=0.4$ [m]における無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ はほぼゼロであり、この結果からも日照により生じるコンクリートの内部応力変動は表面から深さ0.4[m]程度までに限定されることが確認される。

4.3 解析例(表面に時間に対して線形的な温度上昇が作用する場合)

図-7には時間に対して線形的な温度上昇が生じた場合の $(\sigma_x + \sigma_y)$ の分布を示した。解析パラメータの設定は前節と同様であり、表-1に示した値を用いている。ここでも $(\sigma_x + \sigma_y)$ は $aET_0/(1-\nu)$ で除して表現しており、 T_0 については $T_0=1.0$ [°C]とした。また、同様に点線での結果は前述した段階的な計算により得られた結果である。

表-1 解析パラメータの設定(コンクリート)

線膨張係数	α	1.0×10^{-5} [1/°C]
ヤング率	E	2.5×10^{10} [N/m ²]
熱拡散係数	Ω	8.33×10^{-7} [m ² /s]
ポアソン比	ν	0.2

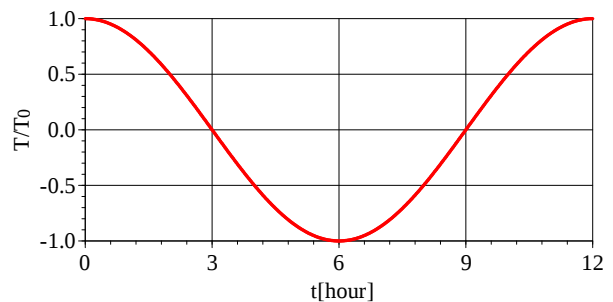


図-3 表面での温度変化(式(14)に対応)

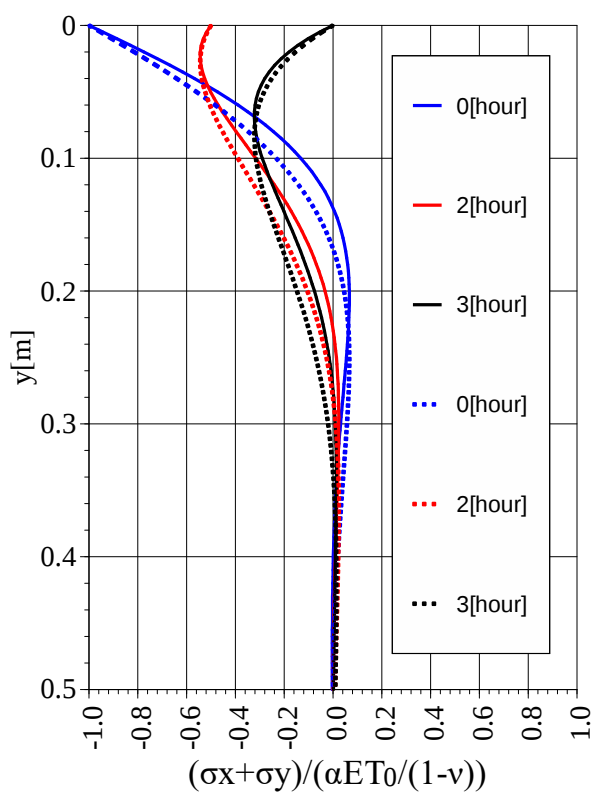


図-4 各時間における無次元化された $(\sigma_x+\sigma_y)$ の分布
(実践：式(18), 点線：段階的な計算[4.2節])

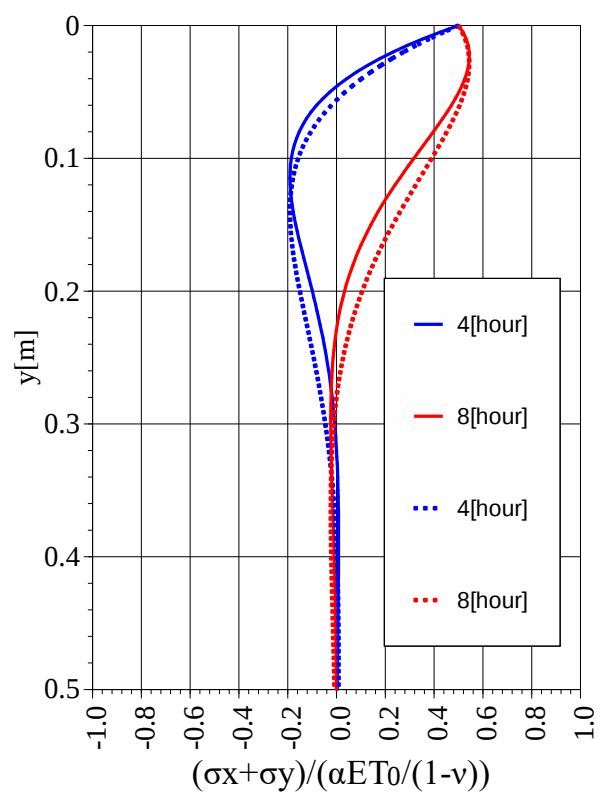


図-5 各時間における無次元化された $(\sigma_x+\sigma_y)$ の分布
(実践：式(18), 点線：段階的な計算[4.2節])

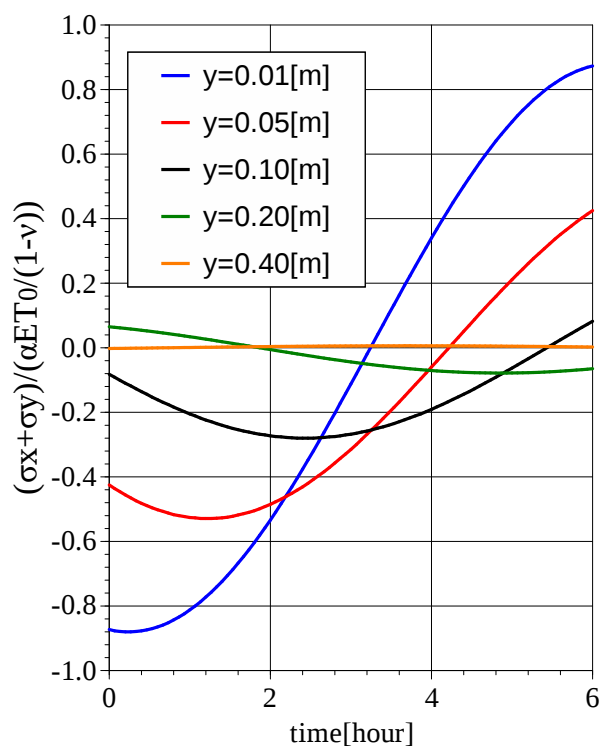


図-6 各深さにおける無次元化された
 $(\sigma_x+\sigma_y)$ の時刻歴変動

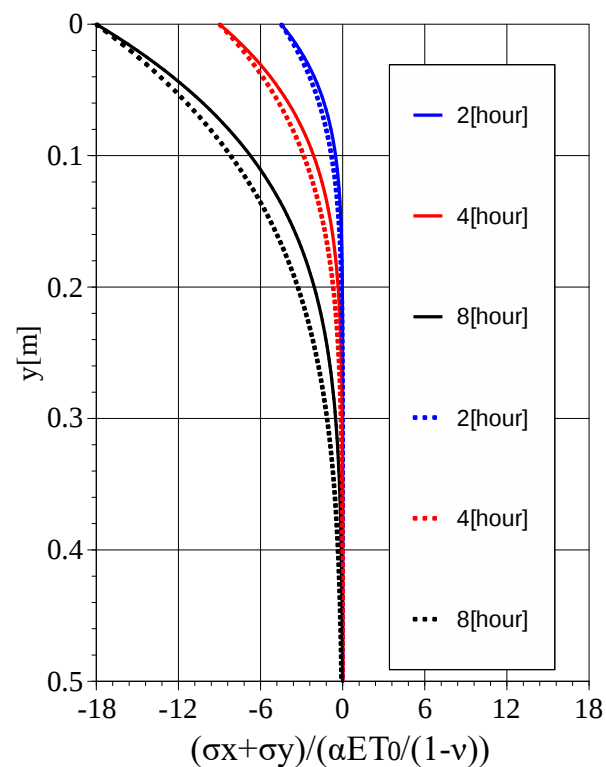


図-7 各時間における無次元化された $(\sigma_x+\sigma_y)$ の分布
(実践：式(25), 点線：段階的な計算[4.2節])
[$(T_0=1.0[^\circ\text{C}])$]

図-7より、式(25)より計算された結果と段階的な計算により得られた結果はほぼ同様な傾向を示している。この結果では温度上昇による膨張に由来して無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ は圧縮領域(負の値)にのみ生じており、各時間における無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の分布は深さにともなって指数的に減少する傾向を示している。この解析例においても8時間経過した段階で無次元化された $(\sigma_x + \sigma_y)$ の変動が生じているのは表面から概ね0.4[m]程度の深さまでであることが確認できる。

5. まとめ

熱伝導に由来した応力変動にともなって生じるひずみ速度をつり合い式とし、熱弾性体に関する適合条件式を考慮することにより $(\sigma_x + \sigma_y)$ を未知項とした非定常温度応力に関する支配方程式を定式化した。この支配方程式を利用し平面ひずみ状態を想定した半無限弾性体の表面に動的な温度変化が生じる場合での $(\sigma_x + \sigma_y)$ に関する解析解を導出、夏季における日照によるコンクリート表面の温度変化を想定した解析例を示した。

解析解(式(18)ならびに式(25))は弾性的特性であるポアソン比・ヤング率・線膨張係数と熱伝導特性である熱拡散係数の双方を含む形式となっており、表計算ソフトが利用できる環境があれば容易に $(\sigma_x + \sigma_y)$ に対するそれらの影響を直接的に検討可能な表現となっている。

付録 熱弾性体の平面ひずみ状態における適合条件式

平面ひずみ状態における σ_x と σ_y はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_x - \beta_T T \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_y - \beta_T T\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

ここで、 μ はせん断弾性係数、 ε_v は各ひずみの成分の総和である($\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$)。式(A1)をそれぞれ y と x で二回微分してたしあわせると次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} \right) \\ &+ 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) - \beta_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)\end{aligned}\quad (\text{A2})$$

上式の右辺第2項の部分には弾性論に基づくひずみの適合条件式と $\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}/2\mu$ であることを考慮し、また、 ε_v については $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y = (\sigma_x + \sigma_y)/[2(\lambda + \mu)]$ を考慮することにより次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2(\lambda + \mu)} \\ &+ 2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} - \beta_T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

式(A3)の両辺に $\partial^2 \sigma_x / \partial x^2 + \partial^2 \sigma_y / \partial y^2$ を加え、平面ひずみ状態での弾性体の平衡方程式を考慮することで次式を得る。

$$\begin{aligned}\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) \\ &- \beta_T \nabla^2 T\end{aligned}\quad (\text{A4})$$

ここで、 $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$ と $\mu = E/[2(1+\nu)]$ の関係より $(\lambda + 2\mu)/[2(\lambda + \mu)] = (1-\nu)$ と書けることを考慮すれば平面ひずみ状態における熱弾性体の適合条件式として次式を得る。

$$\nabla^2 \left((\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\beta_T T}{1-\nu} \right) = 0 \quad (\text{A5})$$

参考文献

- 1) 尾関孝人, 西澤辰男, 加藤浩司: 空港コンクリート舗装版の温度分布特性, 土木学会舗装工学論文集, Vol. 13, pp.141-148, 2008,12
- 2) 内海秀幸, 鈴木誠: コンクリートの熱応力解析に利用可能な熱弾性体の適合条件式, 日本コンクリート工学協会, コンクリート工学, Vol. 58, No. 7, pp. 501-506, 2020
- 3) Okusa, S.: "Wave-induced stresses in unsaturated submarine sediments", Géotechnique, Vol.35, No.4, pp. 517-532, 1985
- 4) Timoshenko, S. and Goodier, J. N.: Theory of elasticity (Second edition), McGraw-Hill, pp.421-427. 1951
- 5) Biot, M. A.: General Theory of Three - Dimensional Consolidation, Journal of Applied Physics, Vol. 12, No. 155, pp. 155-164. 1941
- 6) Cheng, A. H.-D., Badmus, T. and Beskos, D. E.: Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, No. 5, pp. 1136-1157, 1991.
- 7) 進藤裕英: 線形弾性論の基礎, コロナ社, pp. 148-150, 2002
- 8) 小平吉男: 物理数学(第2巻), 現代工学社, pp.266-269, 1971
- 9) グレーベル・エルク, グリグル(坪内為雄, 加藤清雄訳): 熱伝導の基礎, 朝倉書店, pp.76-78, 1963
- 10) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: Conduction Of Heat In Solids, Oxford University Press, pp. 62-63, 1986