

論文 HPM による引張破壊エネルギーを考慮したコンクリート部材のひび割れ進展解析

上林 厚志*1・藤原 良博*2・塩見 忠彦*2・竹内 則雄*3

要旨：本論文ではハイブリッド型ペナルティ法（HPM）に変位制御解析手法を導入し、コンクリートの引張破壊エネルギーを考慮した無筋コンクリートのひび割れ進展を考慮した解析を行い、実験結果と比較して解析手法の適用性を確認した。HPM では引張軟化曲線を材料試験結果から得られる引張破壊エネルギーを用いてひび割れ幅との関係で直接記述できるため、要素寸法に依存しない解析を行うことができる。次に、これを確認するため、要素寸法を変えた解析により検証した。最後に、圧縮側で非線形性を示す Deep Beam の解析結果を示し、鉄筋コンクリート部材解析への適用性を確認した。

キーワード：ハイブリッド型ペナルティ法（HPM）、変位制御解析、離散ひび割れ

1. はじめに

コンクリート構造の部材解析では初期ひび割れの進展が破壊性状に与える影響が大きい場合もあるため、ひび割れの進展を正確に計算する必要がある。ひび割れに伴う応力解放の取り扱い、FEM 等の解析手法では、破壊特性を評価する材料試験によって得られた引張破壊エネルギーと等価となるように、応力ひずみ関係に換算して引張軟化曲線を設定し評価しているが、解析結果が要素寸法に依存することもある。

ひび割れなどの応力解放の伴う問題では、非線形解析法として、変位制御を用いることが多い。しかし、HPM では強制変位点に剛性の大きなペナルティ関数を配置しているため¹⁾²⁾、一般的な変位制御では荷重項に大きな値が入り解析が困難であった。このため、従来の解析では、荷重制御が用いられてきた³⁾。

そこで、強制変位を与える自由度に該当するペナルティ係数行列に加え、荷重項についてもペナルティ関数を掛けることで、 r_{min} 法⁴⁾を適用できる変位制御による非線形解析法を開発した。本論文では、この変位制御解析手法を用いて、コンクリートの引張破壊エネルギーを考慮した無筋コンクリートのひび割れ進展解析を行い、開発した手法の妥当性について検討する。

HPM では要素変形とひび割れ幅を分離して扱えるため、引張応力軟化曲線をひび割れ幅と表面力の関係を直接記述でき、材料特性などで要素分割を考慮する必要がない。これを確認するため、要素分割の異なる解析例について、変位制御により解析した結果を報告する。また、コンクリートの圧縮側非線形を含む鉄筋コンクリート部材の変位制御解析を行い、解析法の妥当性を検討する。

2. ハイブリッド型ペナルティ法（HPM）

HPM は図-1 に示すように要素代表点の変位(式(1))と要素内ひずみ(式(2))を自由度とし、これらにより要素内変位場を定義する(式(3a), (3b), (3c))。

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u, v, \theta]^t \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^t \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (3a)$$

ここで、

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y - y_p) \\ 0 & 1 & (x - x_p) \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} (x - x_p) & 0 & (y - y_p)/2 \\ 0 & (y - y_p) & (x - x_p)/2 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}] \quad (3d)$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t \quad (3e)$$

ただし、上付きの()は部分領域番号、下付の<>は隣接要素境界辺の番号を意味する。

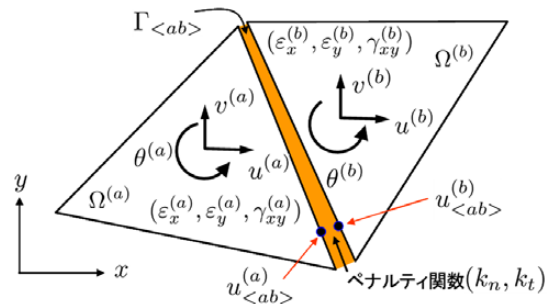


図-1 HPMの自由度とペナルティ関数

*1 (株) 竹中工務店 技術研究所 (正会員)

*2 (株) マインド 博士 (工学)

*3 法政大学 デザイン工学部教授 工学博士

この要素内変位を用いて要素境界に設定された十分に剛なペナルティ関数の相対変位を求め、要素境界力を決定する。式(4)にペナルティ関数の相対変位から要素境界力を求める式を示す。なお、本解析では三角形要素を用い、要素内は一樣ひずみとした。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(a)} - u_n^{(b)} \\ u_s^{(a)} - u_s^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ハイブリッド型の仮想仕事式が要素内応力と要素境界のペナルティと全領域の表面力の項として式(5)のように書ける。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda \cdot (\mathbf{u}_{<ab>}^{(a)} - \mathbf{u}_{<ab>}^{(b)}) \, dS \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (5)$$

ここで、 M は図-2に示すように、境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた部分領域 $\Omega^{(e)}$ の数、 N は隣接要素の共通の境界 $\Gamma_{<ab>} := \partial\Omega^{(a)} \cap \partial\Omega^{(b)}$ の数であり、 $\boldsymbol{\sigma}$ は要素応力、 $\delta \mathbf{u}$ は仮想変位、 $\mathbf{t} := \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ は表面力、 $\mathbf{n}$ 法線ベクトルである。

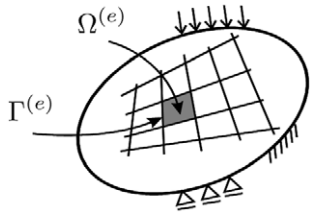


図-2 部分領域と境界領域

3. 変位制御解析法の実装

ひび割れによる応力解放や圧壊によるピーク以降の解析を行うため、変位制御による解析手法を既往の荷重制御の解析プログラムに実装した。図-3に変位制御のフローを示す。変位制御は制御点に関するペナルティ行列 ${}^t\mathbf{N}^{(e)} k_p \mathbf{N}^{(e)}$ を全体係数行列に加える。ここで、 $\mathbf{N}^{(e)}$ は、式(3a)の拘束自由度方向成分を表しており、 k_p は、ペナルティ関数である。一方、荷重項に関しては、強制変位を $\hat{\mathbf{u}}$ として、 ${}^t\mathbf{N}^{(e)} k_p \hat{\mathbf{u}}(1 - r_{min})$ を作成してセットする。この荷重項による全体変形を求める。ひび割れによる非線形解析は、まず r_{min} 法⁴⁾により最初のひび割れまでを解析する。ひび割れた要素境界の解放力は次の解析ステップで残りの変位増分と共に作用させる。除荷のみのステップはない。また、要素境界のペナルティはひび割れ時に消去し、応力の解放は引張破壊エネルギーを考慮したものととした。

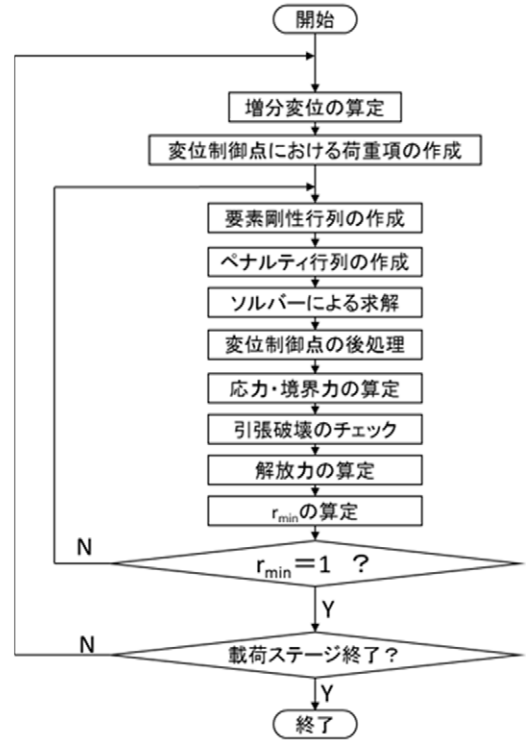
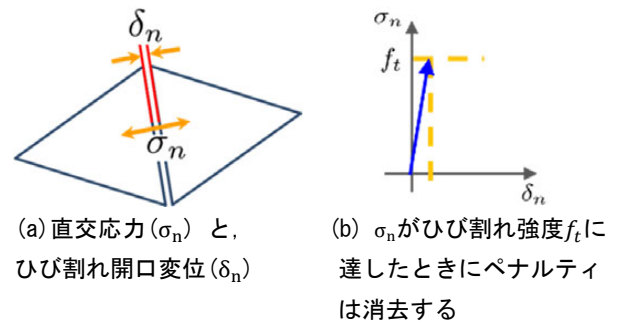


図-3 変位制御のフロー

4. 引張破壊エネルギーの考慮

ひび割れの判定は図-2(a)(b)に示すように要素間のペナルティ関数の応力値 σ_n が引張強度 f_t を超えた場合にひび割れたと判断してバネを削除する。それ以降はひび割れ幅 δ_n と応力 σ_n の関係を図-2(c)の曲線として表し、この曲線に沿って応力を解放する。この曲線の下側の面積が破壊エネルギー G_f となる Hordijk の3次曲線⁵⁾を用いる。



(c) ひび割れ幅とひび割れ解放応力の関係
図-4 引張破壊エネルギーとひび割れ解放応力

5. 圧縮破壊の構成モデル

HPM では、圧縮破壊を要素内部に対して適用する。コンクリートの一軸圧縮応力ひずみ関係は竹内らが RBSM で採用した方法³⁾と同様に圧縮限界ひずみ ϵ'_{cu} まではトリリニアで近似し、 ϵ'_{cu} を超えた場合は軟化を考慮する。圧縮側の破壊エネルギーはスケルトンの形状で制御する。除荷経路は初期剛性で除荷させる。(図-5)。

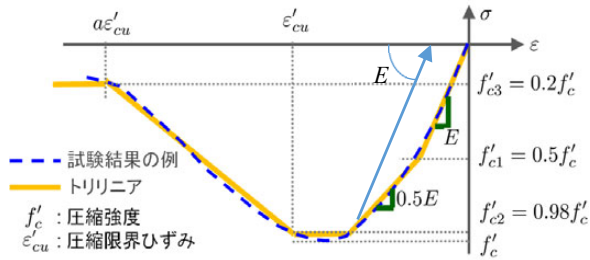


図-5 圧縮応力のスケルトンカーブ

二軸応力状態のコンクリート応力ひずみ関係に上述のスケルトンカーブを適用するために、Kupfer ら⁹⁾が提案した降伏曲面を剛性変化点と圧縮強度に適用して用いる (図-6)。

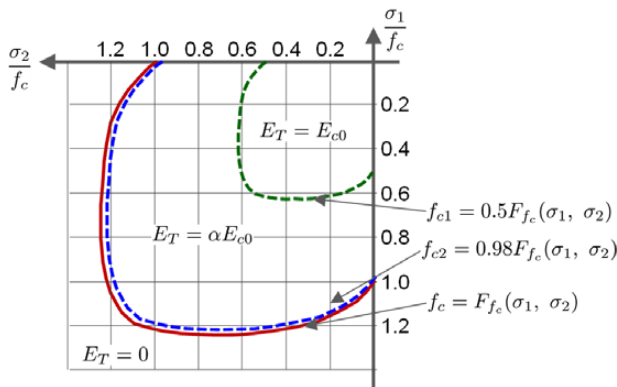


図-6 二軸状態での降伏曲面

6. 無筋コンクリートのひび割れ進展解析

破壊エネルギーを考慮した解析の適用性を確かめるために破壊エネルギーを求める試験 (スリットのある $400 \times 100 \times 100\text{mm}$ の試験体を用いる) を対象として解析を行った⁷⁾。まず、実験で得られた破壊エネルギーの 0.2N/mm を使い、実験結果と比較する。次に要素寸法を変え、その影響を確認した。また、破壊エネルギーを変化させた解析も行い、解析結果に与える影響について検討した。

解析に用いた材料定数は解析対象の材料試験で得られた表-1 の値を用いている。図-7 にデローニ三角形により要素分割を行った解析モデルを示す。

表-1 材料定数

引張強度 f_t (MPa)	3.77
ヤング係数 E (GPa)	26.1
ポアソン比 ν	0.2
厚み (mm)	100.0

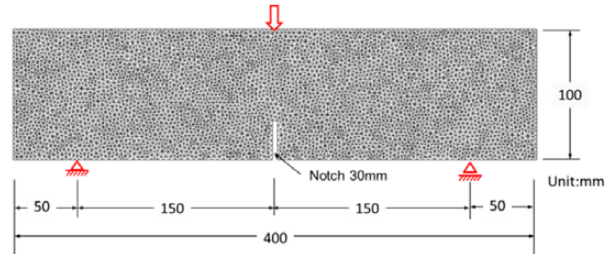
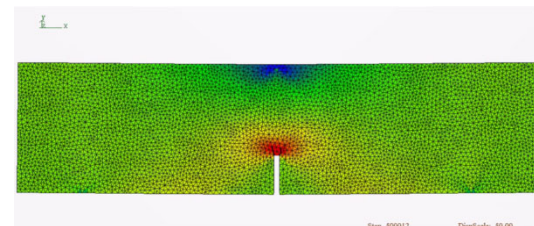


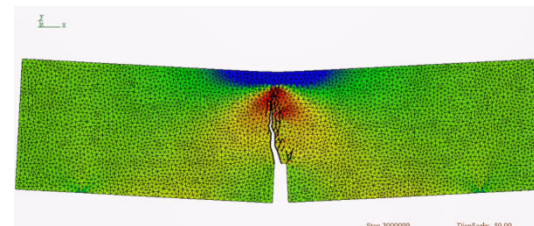
図-7 無筋コンクリートの解析モデル

6.1 試験結果のシミュレーション解析

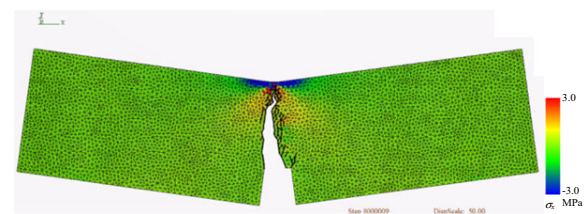
図-8 に変形、ひび割れ状況と水平方向応力の分布を示す。ひび割れは切り欠き上部より2本生じ、片側のひび割れが徐々に進展して最大荷重時を迎え、その後さらにひび割れが進展し、荷重は低下して行く。



(a) ひび割れ直後



(b) 最大荷重付近



(c) 最終ステップ

図-8 変形、ひび割れと水平方向の応力分布

図-9 に開口変位(CMOD)と荷重の関係を実験値と比較して示す。最大荷重は実験値より若干大きくなるがピーク後の曲線はよく一致している。

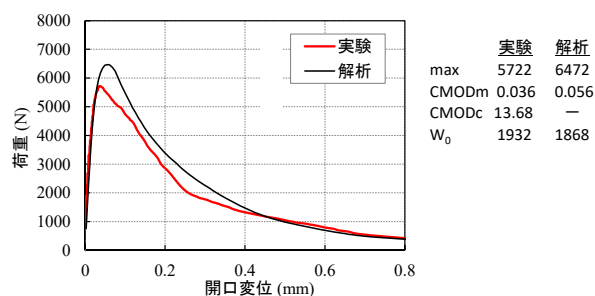
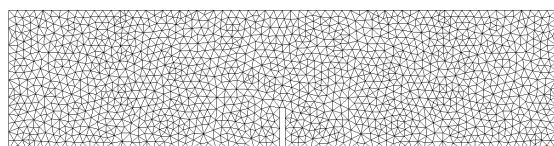


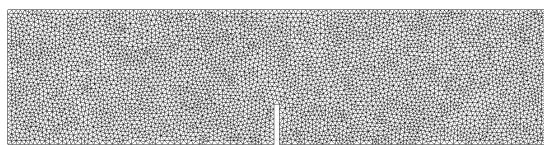
図-9 変位と開口変位 (CMOD) の関係

6.2 要素寸法の影響

FEM 等の分布ひび割れを前提とした解析では、要素寸法に依存したひび割れ後の応力ひずみ関係を設定する必要がある。しかしながら HPM では離散ひび割れを取り扱うため、要素寸法によって材料定数を変化させなくてもよい。これを確認するために粗い要素分割と細かい要素分割の解析結果を比較する。図-10 に粗い (1500) 分割と細かい (5000) 分割の要素分割図 (図-7 と同じ要素分割) を比較して示す。



(a) 粗い要素分割 (1500 nodes)



(b) 細かい要素分割 (5000 nodes)

図-10 要素分割の影響を確認する解析の要素分割図

図-11 に解析結果の荷重-開口変位(CMOD)関係を示す。材料定数としては代表要素寸法等を用いずに荒い要素分割と細かい要素分割の解析を行っているが両者ともにほぼ同様の曲線となっている。粗い要素分割の方が若干、荷重が大きく出ているのはひび割れ経路の自由度が制約されるためと考えられる。図-12 に各解析のひび割れ状況と最大主応力の分布を示す。ひび割れは複数個所から発生し、やがて一本のひび割れに収束していく。変形は 40 倍して示している。

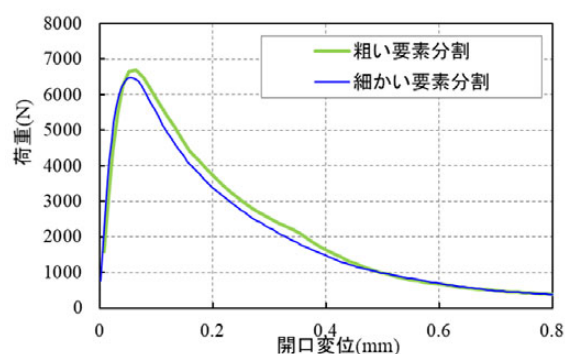
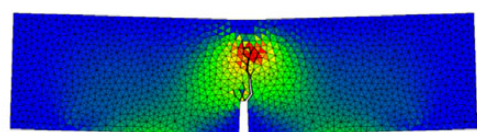
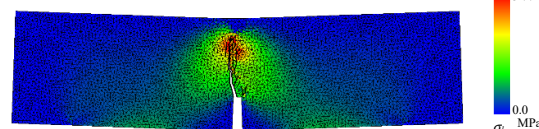


図-11 要素分割の影響：変位と CMOD の関係



(a) 粗い要素分割



(b) 細かい要素分割

図-12 ひび割れ状況と最大主応力の分布

6.3 破壊エネルギーの影響

破壊エネルギーの値が解析結果に与える影響を確認するために破壊エネルギー G_f を $G_f=0.01\text{N/mm}$, 0.1N/mm , 0.2N/mm と変化させた場合の解析結果を比較する。図-13 にそれぞれの荷重と開口変位関係を示す。破壊エネルギーを $G_f=0.01\text{N/mm}$ と極端に小さくした場合は荷重のピークはかなり小さくなるが、軟化曲線の傾きは 1 解析ステップで荷重が大きく減少せず、解析も安定している。

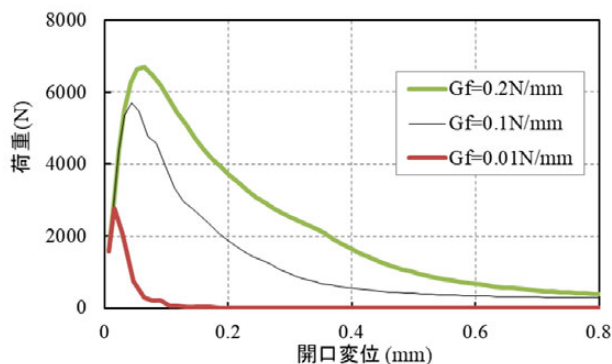


図-13 破壊エネルギーの影響：荷重と開口変位関係

7. Deep Beam のせん断破壊の解析

解析の対象とした実験⁸⁾の模式図を図-14に示す。また、解析モデルを図-15に示す。鉄筋を含む要素は鉄筋の剛性をコンクリートの剛性に重ね合わせた要素とし、鉄筋の応力ひずみ関係はバイリニアとした。また、鉄筋を含む要素とコンクリートだけの要素はコンクリートのペナルティ関数で接続しており付着滑りは考慮していない。図中の赤枠内の要素には鉄筋の材料定数を設定した。層厚は鉄筋の総断面積が等しくなるように設定した。材料定数を表-2に示す⁸⁾。

強制変位は拡張 r_{min} 法⁹⁾の収束性を考慮して細分化し、左右の载荷版の中央上面に与えた。

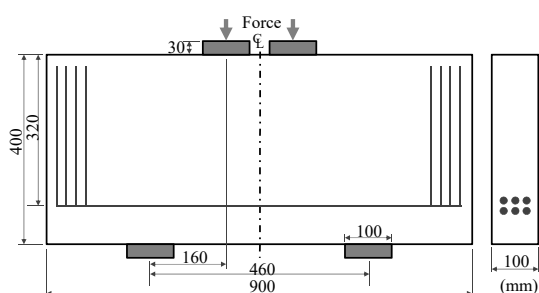


図-14 DeepBeam 試験体の模式図

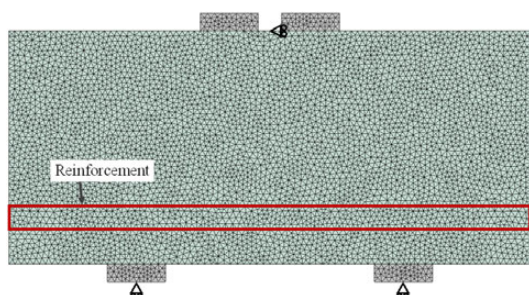


図-15 DeepBeam 解析モデル

図-16に荷重変形関係を示す(図中の黄色○は図-17の出力位置)。解析結果のせん断力が不連続になっているのは、左側支持版上のコンクリートが圧縮破壊したためである。ひび割れが進展して最終的に崩壊するまで、よく対応する結果が得られた。

図-17に変形図(倍率 40.0)と最小主応力の分布を示す。最初に供試体下面中央に曲げひび割れが入り、次に支持版から载荷版に向かいせん断ひび割れが進展していく過程を表すことができた。ひび割れ後に支持版と载荷版間に圧縮ストラットが形成され、最終的に圧縮破壊により計算が終了した。このように、鉄筋コンクリートにおいて進行性破壊現象がピーク以降を含めて計算できることを確認できた。

表-2 材料定数

項目	コンクリート	鉄筋	支承版
圧縮強度 f_c (MPa)	54.4	375.3	—
引張強度 f_t (MPa)	3.3	375.3	—
ヤング係数 E (GPa)	33.3	210	210
ポアソン比	0.167	—	0.3
厚み (mm)	100.0	29.79	100.0
破壊エネルギー G_f (N/mm)	0.13	—	—

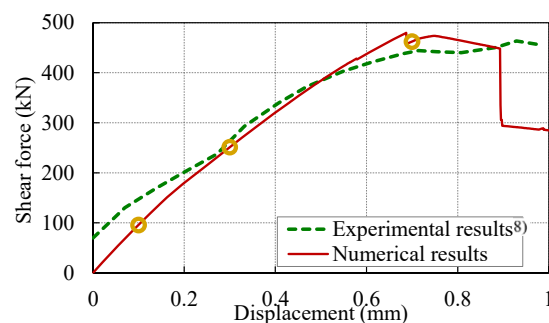
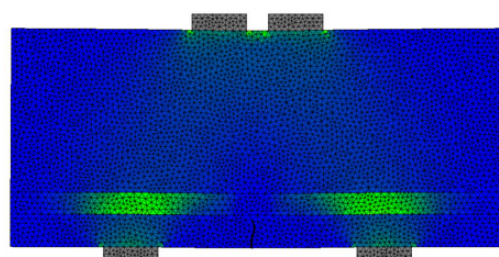
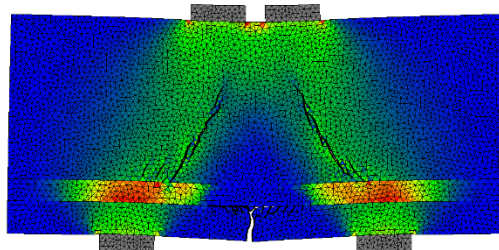


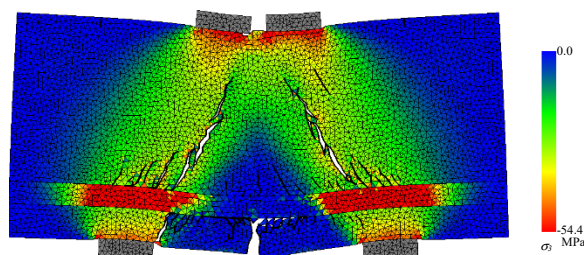
図-16 DeepBeam の荷重変形関係



(a) $\delta=0.1\text{mm}$



(b) $\delta=0.3\text{mm}$



(c) $\delta=0.7\text{mm}$

図-17 変形図と σ_3 コンター図

8. まとめ

ハイブリッド型ペナルティ法（HPM）に変位制御解析機能と、コンクリートのひび割れ破壊エネルギーを考慮し応力を解放する機能を追加して、無筋コンクリートのひび割れ進展と、Deep Beam のせん断破壊を解析し、その結果を示した。

無筋コンクリートのひび割れ進展解析では、HPM は引張破壊エネルギーの評価としては応力-ひび割れ幅関係がそのまま適用できるため、要素分割を細かくすることによる要素寸法に対する材料定数の調整を行わなくてもほぼ同様の解析結果が得られることを確認した。また、破壊エネルギーを変化させた解析を行い、破壊エネルギーは荷重のピーク値と軟化曲線に影響するが、極端に破壊エネルギーが小さくても解析は安定していることを確認した。

また、Deep Beam のせん断破壊解析では、この手法がコンクリートの圧縮側非線形性を含む鉄筋コンクリートの部材解析にも適用できることを示した。

参考文献

- 1) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270,2000.
- 2) 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集, 2001.
- 3) 竹内則雄, 上田真稔, 上林厚志, 鬼頭宏明ほか: 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法, 丸善, 2005.
- 4) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol. 10, pp.323-354, 1968.
- 5) Cornelissen, H. A. W., Hordijk, D. A. and Reinhardt, H. W.: Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture toughness and Fracture Energy of Concrete, pp.565-575, 1986.
- 6) Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. : Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ACI Journal Proceedings, Vol. 66, No.8, pp.656-666, 1969.
- 7) 上林厚志, 藤原良博, 竹内則雄, 塩見忠彦: HPM による無筋コンクリートのひび割れ進展解析, 計算工学講演会論文集, 2015.
- 8) 日本コンクリート工学会編:破壊力学の応用研究会報告書, (社) 日本コンクリート工学会, 1993.
- 9) 竹内則雄: 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991.