論文 変位型骨組要素の局所化問題とレギュラリゼーションの提案

堀川 真之*1

要旨:塑性ヒンジ長さの設定の違いが,地震動を受ける部材のポストピーク挙動に影響を及ぼすことは従来 から指摘されている。本論文では,骨組解析の高精度化を目的として,破壊力学の概念を変位型骨組要素の 離散化へ導入し,力-変位関係におけるポストピークの精度改善を検討した。また,塑性ヒンジ長さと対応 付けたポスト処理によって曲率の正則化手法を提案した。最後に,高軸力と水平外力を受ける RC 柱の実験 と比較し提案手法を検証した。その結果,当該手法によってポストピークが大幅に改善されることを確認し, 曲げ応答が卓越する条件において,塑性ヒンジ長さの設定に依存しない数値解析手法の構築に概ね成功した。 キーワード:変位型骨組要素,ひずみの局所化,破壊力学,レギュラリゼーション(正則化)

1. はじめに

鉄筋コンクリート(以下, RC)造建物の耐震性能評価 を行う場合、構造解析によって部材の限界状態を適切に 評価する必要がある ¹⁾。この目的を達成するためには, 解析モデルの高精度化が必要不可欠である。Zeris ら²⁾は、 変位法に基づく骨組要素(以下、変位型骨組要素)の要 素寸法依存性を指摘し、ポストピークを追随するため、 応力法に基づく定式を混合した。しかし、反復過程が極 めて複雑であり一般化には至っていない。その後 Spacone ら³⁾, Neuenhofer ら⁴⁾によって改善が試みられ, その成果は、応力法に基づく骨組要素(以下、応力型骨 組要素)として解析コード Opensees へ実装されている。 一方,変位型骨組要素の寸法依存性を塑性ヒンジ長さ と対応付けて回避する試みも存在する。Legeron ら⁵は, 有限要素法による検討を重ね、モーメントが最大となる 材端要素の分割を Priestley ら ⁶が提案する塑性ヒンジ長 さに対応づけた。種々の部材・構造実験と比較し良好な 一致を示したが、モーメントー曲率関係(以下、局所応 答)を検証するまでには至っていない。Calablese ら⁷は, 文献5と同様の手法を用いて検討を行い、局所応答が実 験値を大幅に過大評価することを指摘した。塑性ヒンジ 長さを2倍に設定することで局所応答の良好な再現性を 確認しているが、カー変位関係(以下、全体応答)の予 測精度は大幅に低下する。

このような背景の下,本論文では,有限要素法による 変位型骨組要素を用いて,全体と局所の両応答を精度良 く予測できる手法を提案する。先行研究に見られるひず みの局所化を再確認し,検討解析を通じて問題点を抽出 する。続いて,破壊力学の概念を導入し,骨組要素の寸 法や積分点数に依存しないレギュラリゼーション手法を 構築する。この取り組みは,大規模解析におけるポスト ピークの精度低下⁸を克服するための1つの試みでもあ り、これまで蓄積されてきた塑性ヒンジ長さの設定方法 ⁹に新たな選択肢を加えるものでもある。なお、本論文で は、曲げ応答に限定して検討を行い、せん断変形の影響 を考慮した検討は今後の課題とする。検討に際しては、 汎用コード DIANA 10.4 を使用する。

2. 骨組要素の定式化

2.1 モデルの仮定と一般式

本論文では, Euler-Bernoulli はり理論に基づき, ひずみ の局所化ならびにレギュラリゼーションを考察する。モ デルの仮定(図-1参照)と一般式が, 文献4により詳 述されており, ここで加筆しながら要約する。なお, 簡 便のため,本節では単一要素に限定して定式化を記述す る。3次元要素の変位ベクトルは次式により表現される。

 $u(x) = \{u(x) w(x) v(x)\}^T$ (1) ここで、u(x)は軸変位、w(x)はz方向の変位、v(x)はy方 向の変位である。続いて、式(1)に対応する変形場、すな わち、ひずみ ϵ および曲率 κ は、次式により表現される。

$$\mathbf{d}(x) = \left\{ \varepsilon(x) \, \kappa_y(x) \, \kappa_z(x) \right\}^T = \left\{ \frac{\partial u(x)}{\partial x} \, \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \, \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right\}^T$$
(2)

一方,対応する応力場は次のようである。

$$\mathbf{D}(x) = \left[N(x) \, M_{\nu}(x) \, M_{z}(x) \right]^{T} \tag{3}$$

ここで, N(x)は軸力, M(x)は曲げモーメントである。応 力場と変形場の線形関係は,式(2)および式(3)を用いて, 次式により表現される。

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{k} \Delta \mathbf{d} \tag{4}$$

ここで, ΔDは応力場増分, kは断面剛性; EI または EA, Δdはひずみおよび曲率の増分である。変位法による変位 場は, 次式のように節点変位Uの関数として表現される。

*1 日本大学 工学部建築学科専任講師 博士(工学) (正会員)



$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{U}$$
(5)

ここで, N(x)は内挿関数であり, 次式により表現できる。

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_u(x) & 0 & 0\\ 0 & N_w(x) & 0\\ 0 & 0 & N_v(x) \end{bmatrix}$$
(6)

式(2)へ式(5)および式(6)を代入すると次式を得る。

$$\mathbf{d}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_u(x)}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_w(x)}{\partial x^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathbf{N}_v(x)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \mathbf{u}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}(x)$$

(7)

ここで,**B**(*x*)はひずみ-変位演算子である。仮想変位の 原理を適用して整理すると,次式の釣合方程式を得る。

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{k}(x) \mathbf{B}(x) dx \tag{9}$$

ここで, kは断面剛性マトリクス, *L* は要素長さである。 2.2 数値積分則

有限要素法における数値積分は, 誤差マトリクスの評価を無視すると, 3 次元問題では次式により表現される。

 $\int \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i,j,k} w_{IP,ijk} \mathbf{F}(x_i, y_j, z_k)$ (10) ここで、 $\mathbf{F}(x, y, z)$ は要素内の積分点; Integration Point (以 下、IP) で評価されるマトリクス、 $w_{IP,ijk}$ は IP の重み; Weight of IP である。前者は、選択する積分則に応じて 様々であり、代表例として Newton-Cotes 則と Gauss-Legendre 則が挙げられる。これらの詳細は、Bathe の文献 ¹⁰⁾を参照することにして、Newton-Cotes 則を本論文の対 象とした。この求積は、IP を要素の両端部に配置する点 が特徴であるが、Gauss-Legendre 則より積分次数が高く なり計算量は増大する。記述を容易とするため1次元積 分に焦点を当てることにする。Newton-Cotes 則による関 数Fの近似は、次式により表現される。

 $\int_{a}^{b} F(r) dr = (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_{IP,i}^{n} \cdot F_{i} + R_{n}$ (11) ここで、 $w_{IP,i}^{n}$ は n 個の間隔を有する Newton-Cotes 定数で あり、IP の重みである。 R_{n} は微小誤差であり一般に無視 される。図-2 に n = 2 の場合における Newton-Cotes 則 を示す。図より、区間 a-b を 2 個に分けると 3 点の IP (*i* = 0,1,2) が必要となる。したがって、F(r)が 1 次または 2 次関数である場合、式(11)の積分は正確である。このこ



とから, F(r)の次数と IP の数には次式の関係がある。

m-1=l (12)
ここで,mはIPの数,lはF(r)の次数である。式(9)へ式
(11)を適用すると,n=2の場合における Newton-Cotes 則
は次式を導く。

$$\mathbf{K} \cong \sum_{i=0}^{2} w_{IP,i}^{2} \cdot L \cdot \mathbf{B}^{T}(x_{i}) \mathbf{k}(x_{i}) \mathbf{B}(x_{i})$$
(13)
ここで, $w_{IP,0}^{2}$, $w_{IP,1}^{2}$, $w_{IP,2}^{2}$ は,各1/6,4/6,1/6である¹⁰。

3. 変位型骨組要素の局所化問題

3.1 RC 柱に生じるひずみの局所化

ひずみの局所化問題を把握するため、図-3 に示す Tanaka と Park¹¹⁾による片持ち柱の実験を対象に検討解析 を実施する。破壊モードは曲げ圧縮破壊であり、解析に 必要な情報が不足なく記述されているほか、既往の応力 型骨組要素の正則化手法の検証実験として採用されてい る¹⁵⁾。図-4 に鉄筋とコンクリートのσ-ε 関係を示す。



鉄筋は硬化率を1%と仮定し、コンクリートはKent-Park モデル¹²⁾とした。拘束効果による強度上昇をMander¹³⁾の 手法により求め 39 N/mm²とし、かぶりとコアを分ける ことはせず、断面全てにコアコンクリートの特性を割り 当てた。また、引張側は、引張強度まで弾性とし、以後 の軟化勾配はゼロを仮定した。なお、ひび割れは回転す ることを許容した。図-5 に採用した変位型骨組要素を 示す。両端に6自由度、中央にx方向の自由度が付加さ れた、合計13自由度をもつ梁要素とした。内挿多項式は 次式のようである。

$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{14}$

$$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \tag{15}$$

 $w(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ (16) 続いて,選択すべき積分次数を考察する。本節で検討す る RC 柱の実験は,頂部に一定軸力と水平力を受ける。 よって,節点力ベクトルは定数項となるため,要素剛性 マトリクス;式(9)が数値積分の評価対象となる。式(9)に は,式(14)の1階微分の2乗,または,式(15)および式(16) の2階微分の2乗が含まれる。これらはともに2次多項 式となる要素剛性マトリクスを導く。したがって,式(12)

図-6 に要素数をパラメータとしたプッシュオーバー 解析の結果を示す。ここでは、頂部変位を制御し、求解 法は一定剛性法とした。図より、要素数が減るにつれて、 任意の作用変位に対応するベースシアは異なり、最大耐 力やポストピークは一致しない。このことから、当該要 素が、要素寸法に依存していることは明らかである。

より, m=3として良い。

図-7 に柱脚のモーメントー曲率関係を示す。解析値 は、ポストピークが脆性的であり、実験値の再現性は低 い。要素数が2個と6個の場合を比較すると、最終値が 約2.5 倍異なる。要素数が増えるにつれて、同一の頂部 変位 δ を得るために(図-6参照)、脚部の曲率が大きく 評価されていることが分かる(図-7参照)。

3.2 材料のポストピークの違いが部材応答に及ぼす影響

前節より,最大耐力以降で応答の相違が顕著であるこ とから,特にポストピークのひずみ応答に着目した考察 が必要である。そこで,本論文では,ひずみ軟化の勾配



図-8 軟化勾配の違いが全体・局所応答に及ぼす影響

と要素寸法をパラメータとした検討を試みた。図-8(a) および(b)に硬化率の異なる片持ち柱の検討結果を示す。 部材長さは 2500(mm),断面は h:50(mm)×b:25(mm)であ る。材料は鋼材を想定し,降伏応力度 345(N/mm²),ヤン グ係数 Es = 207000(N/mm²)とした。降伏後の硬化率は, それぞれ 25%と 1%とし,圧縮および引張に対して同様 の仮定とした。なお,図-8(b)の硬化率 1%は図-4 に示 す鉄筋のモデルと同様である。自由端に増分変位を与え, 応答を分かり易く表現するため,最終ステップで除荷を 行った。両者を比較すると、全体応答は、要素寸法にか かわらず概ね応答が一致している。一方、局所応答は、 降伏後のひずみ勾配の程度(25% or 1%)に関わらず、要 素数によって脚部の曲率は異なり、ひずみの局所化が見 受けられる。図-8(c)に要素寸法をパラメータとして Kent-Park モデルを圧縮と引張の応力-ひずみ関係に適 用した無筋コンクリート片持ち柱の検討結果を示す。柱 の形状や軸力と頂部の増分変位の大きさは、前節と同様 である。図より、鋼材の検討結果とは異なり、コンクリ ートのひずみ軟化が全体応答に大きな影響を及ぼしてい る。また、局所応答ではひずみの局所化が見受けられる。 このことから、図-6 に示す全体応答に関するポストピ ークを改善するには、コンクリートの圧縮軟化挙動に着 目した改善が必要である。引張軟化挙動は、部材の終局 耐力に及ぼす影響は小さいと考え検討対象外とした。

続いて、図-7 および図-8 に示した曲率分布の寸法 依存性を解明する試みとして、図-8(b)に示す完全弾塑 性モデルを対象に、材軸に沿う曲率分布を考察した。図 -9 に最大ベースシアが作用するステップの曲率分布を 示す。図中には、降伏モーメント $M_y(=Z \cdot \sigma_y)$ に対応する 曲率 $\phi_y(=M_y/EI)$ を併記した。図より、 L_e の寸法にかか わらず、脚部の要素が唯一、塑性化を経験している。こ れは、降伏後の硬化率の仮定が 1%と微小であることも あり、 M_y を超えた要素はそれ以上モーメントを負担する ことはできないためである。その結果、他の要素は弾性 を維持したまま、塑性化した脚部の曲率のみが進行する。 よって、曲率のポストピークの相違を改善するためには、 脚部要素に着目した検討が必要である。

4. レギュラリゼーション手法の概要

前章より,ベースシアー頂部変位に対する要素寸法依存性は,コンクリートの圧縮軟化挙動に起因することを特定した。よって,要素寸法と圧縮軟化特性に着目したレギュラリゼーション手法を検討することが最重要課題である。一方,曲率の局所化は,ひずみの軟化勾配に関わらず生じるものであり,鋼材およびコンクリートの両方で顕在化する。本論文では,曲率の正則化手法として,応力型を対象とした Coleman の手法¹⁴⁾¹⁵⁾を適宜参照し,変位型に対するレギュラリゼーション手法を提案する。

4.1 圧縮軟化特性に対するレギュラリゼーション

図-10 に分散ひび割れ要素におけるレギュラリゼー ションの概念を示す¹⁴⁾。圧縮応力度 σ -変位 Δ 関係の斜 線部分は,最大応力度からの弾性除荷と骨格曲線で囲ま れる面積を指し,圧縮破壊エネルギー G_f^c と呼ばれる。次 に,圧縮応力度 σ -ひずみ度 ε 関係は,変位を破壊領域 長さ L_p で除すことにより得られる。なお、本研究で対象 とする曲げ応答に対する破壊領域長さは、物理的には塑



性ヒンジ長さL_pに相当するものとする。ここで、平均的 な応力-ひずみ関係を次式により表現する。

 $\sigma = \sigma(\varepsilon_0)$ (17) 作用軸力の程度よって塑性ヒンジ長さは異なるため^{例えば} ¹¹⁾,一律に L_p を設定し要素を分割することは望ましくな い。そこで、要素寸法依存性を回避するため、次式の縮 尺関係を導入する。

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma\left(\frac{L_p}{L_e}\varepsilon_0\right) \tag{18}$$

ここで、 L_p は真の塑性ヒンジ長さ、 L_e は解析者が選択する1要素の長さ(=任意の L_p)および $L_p \cdot \varepsilon_0$ は図-10に示す圧縮変位 Δ に対応する。通常のシリンダー試験より得られる平均的な圧縮応力度-ひずみ度関係が使用されるとき、式(18)中の L_e に真の塑性ヒンジ長さ L_p が適用されると、ベースシアー頂部変位の応答は正確に計算される。なお、式(18)は、式(9)の断面剛性マトリクスkに含まれるため、式(18)中の L_e には重みを乗じる必要がある。この $L_e \cdot w_{IP,i}^n$ は、一般に、特性長さhと呼ばれる。例えば、Feenstra¹⁶は2次元平面応力要素に対して、Oliver¹⁷とRots¹⁸⁾の手法を組合せ、次式を提案している。

$$h = \alpha_h \sqrt{A_e} = \alpha_h \left(\sum_{\xi=1}^{n_{\xi}} \sum_{\eta=1}^{n_{\eta}} \det(J) w_{\xi} w_{\eta} \right)^{0.5}$$
(19)

ここで、hは特性長さ、 α_h は要素形状や積分次数に関する ひび割れ角度に依存する修正係数(1または $\sqrt{2}$)、 A_e は要 素面積、 $w_\xi \ge w_\eta$ は Gauss-Legendre 則の重みである。なお、 $\xi \ge \eta$ は要素の自然座標系($-1 \le \xi, \eta \le 1$)である。2次元 問題では、特性長さは要素面積と関係づけられており、 重みが反映されている。現段階において、当該骨組要素



に関するhの評価法は確立されているとは言い難い。よって、評価式に関する種々の検討は今後の課題として、ここでは、式(19)の α_h を1と仮定した次式を用いた。

 $h_i = L_e \cdot w_{IP,i}^n$ (20) ここで、 h_i は特性長さ、 L_e は要素長さ、 $w_{IP,i}^n$ は式(11)に示 す IP の重みである。

4.2 曲率に対するレギュラリゼーション

本節では、曲率の正則化手法を提案する。提案手法は Coleman の手法¹⁴⁾をベースにしているが、後述する幾何 学的評価(図ー11(c))が同手法と異なる。図ー11 に材軸 に沿う曲率分布の概念図を示す。脚部の要素(要素長さ L_e)が全塑性モーメント M_p あるいは降伏モーメント M_y に達すると(図ー11(a))、脚部の曲率 ϕ のみが進行し、そ の他の要素は弾性曲率 $\phi_{elastic}$ を維持する(図ー11(b))。 よって、脚部要素の曲率は次式のように表現できるもの とする。

$$\Phi = \Phi_{elastic} + \lambda \cdot \Phi_{plastic} \tag{21}$$

ここで、 Φ は脚部要素の曲率、 $\Phi_{elastic}$ は弾性曲率(以下、 Φ_e)、 $\Phi_{plastic}$ は降伏後の塑性曲率(以下、 Φ_p)である。 なお、現状では、主筋の抜け出しによる曲率 Φ_{slip} の寄与 分は無視した。 λ は縮尺係数であり、次式により表現する。

 $\lambda = \Phi_p^{TRUE} / \Phi_p^{PREDICT}$ (22) Φ_p^{TRUE} は塑性ヒンジ長さ L_p に対応する曲率、 $\Phi_p^{PREDICT}$ は 任意に解析者が設定する要素長さ L_e に対応する曲率であ る。一方、曲率Фは、弾性部分を無視すると、変形後の幾 何学的関係 (**図-11(c**)) から、次式のように表現できる。

(**m**

$$\Phi = \frac{\theta}{L_e} = \frac{\binom{\theta}{L}}{L_e} = \frac{\delta}{L_e \cdot L}$$
(23)

ここで、 θ は片持ち柱の柱脚節点に対する塑性回転角で ある。式(23)に塑性ヒンジ長さ; L_p および L_e をそれぞれ代 入して整理すると、式(22)は次式にように表現できる。

$$\lambda = \frac{L_e}{L_e} \tag{24}$$

なお, *L_p*は文献 5, 7 および 15 と同様に次式のにより算 出することにする。

$$L_p = 0.08L + 0.022 f_{ye} d_{bl}$$
(25)

ここで、Lは塑性ヒンジから反曲点までの長さ(mm)、fye



図-12 塑性ヒンジ長さの違いが $\sigma - \epsilon$ に及ぼす影響







は塑性ヒンジにおける軸方向鉄筋の設計基準強度 (N/mm²), *d_{bl}*は軸方向鉄筋の直径(mm)である。

5.レギュラリゼーション手法の検証

3 章にて検討した Tanaka と Park の柱を再び解析する。 レギュラリゼーションに際し図-4に示す終局ひずみ ε_{20} を修正する。ここでは,文献 15 と同様に次式を用いた。

$$\varepsilon_{20} = \frac{G_f^c}{0.6f_c' \cdot h} - \frac{0.8f_c'}{E} + \varepsilon_0$$
(26)

ここで、 G_f^c は圧縮破壊エネルギー、 f_c' は圧縮強度、hは特 性長さ、Eはヤング係数、 ε_0 は圧縮強度時のひずみである。 本検討では、 $G_f^c = 180(N/mm)$ (文献 15 と同値)とした。 また、本論文では、外力として集中節点力のみを受ける ため、脚部要素の端部でモーメントが最大になること、 Newton-Cotes 則は必ず要素両端部に積分点を配置するこ とを考慮して、要素端部の重みを一律に採用し $h = L_e/6$ とした。この仮定は、汎用コードの都合上、積分点毎に ε₂₀を入力できないことによるものである。その他のパラ メータは、3章と同様である。

図-12に式(26)に基づき評価した各塑性ヒンジ長さに 対応する圧縮側コンクリートの応力-ひずみ関係を示す。 破線はオリジナルの曲線であるが、比較するといずれも ポストピーク勾配は緩やかに評価されている。図-13に 再解析の結果を示す。1 要素によるケースを除いて、応 答は一致した。図-6 との比較から明らかなように、要 素寸法による応答の依存性は見受けられない。実験の再 現性という点では、最大耐力近傍の剛性と耐力を若干過 大に評価しているが、これはせん断変形を無視している ことに加え、付着をモデル化していないことも1要因と 考えている。図-14 に曲率を再計算した結果を示す。 $L_p=356.8(mm)$ であり、縮尺係数 λ はそれぞれ、4.62

 $(L_e=1650(mm))$, 2.31 $(L_e=825(mm))$, 1.54 $(L_e=550(mm))$ および 0.77 $(L_e=275(mm))$ となった。なお、 λ の評価は、 縦軸が 1.0 以前のステップに対する曲率を $\Phi_{elastic}$ として 取り扱った。図-7 と比較すると、ポストピークは大幅 に改善され、実験値を概ね追随している。

6.まとめ

- 変位型骨組要素の弾塑性挙動は、塑性ヒンジ長さ、 または、要素数の増減に依存して、ポストピーク挙 動が異なることを再確認した。
- 2) 塑性ヒンジ長さを考慮し、数値積分則の影響を加味 した特性長さを設定することにより、カー変位関係 (全体応答)のレギュラリゼーションが可能である。
- 3) 局所応答に対する正則化は、脚部要素にあたる塑性 ヒンジ長さの塑性回転を利用し、幾何学的関係から 評価することが可能である。

謝辞

本研究は日本大学工学部研究費(区分II,代表者:堀川 真之)の助成を受けて行われたものである。研究の遂行 にあたり白井伸明日本大学名誉教授に助言をいただきま した。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 日本建築学会:鉄筋コンクリート造建物の耐震性能 評価指針(案)・同解説,2004
- Zeris, C. A. and Mahin, S. A.: Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation," J. Struct. Eng, Vol.114, Issue 4, pp.804-820, 1988.
- Spacone, E., Filippou, F. C. and Taucer, F. F.: Fiber Beam-Column Model for Non-Linear Analysis of R/C Frame: Part 1. Formulation, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol.25, Issue 7, 1996.

- Neuenhofer, A. and Filippou, F. C.: Evaluation of Nonlinear Frame Finite-Element Models, *J. Struct. Eng*, Vol.123, Issue 7, pp.958-966, 1997.
- Le'geron, F., Paultre, P. and Mazars, J.: Damage Mechanics Modeling of Nonlinear Seismic Behavior of concrete structures, *J. Struct. Eng*, Vol.131, Issue 6, pp.946–955, 2005.
- M. J. N. Priestley, F. Seible, G. M. Calvi 著,川島一彦監 訳:橋梁の耐震設計と耐震補強,技報堂出版,2000
- Calabrese, A., Almeida, P. J., and Pinho, R.: Numerical Issues in Distributed Inelasticity Modeling of RC Frame Elements for Seismic Analysis, *J. Earthq. Eng*, Vol.14, Issue Sup 1, pp.38-68, 2010.
- 8) 日本建築学会:鉄筋コンクリート部材の構造性能評価の現状と将来,2.11節,pp.75-83,2019.
- 日本建築学会:鉄筋コンクリート構造保有水平耐力 計算規準(案)・同解説,16条構造物のモデル化, pp.115-118,2016.
- Bathe, K. J.: Finite Element Procedures. (Second Edition), Prentice-Hall, USA, 2014.
- Tanaka, H. and Park, R.: Effect of Lateral Confining Reinforcement on the Ductile Behavior of Reinforced Concrete Columns, Rep. No. 90-2, Univ. of Canterbury, New Zealand, 1990.
- 12) Kent, D. C. and Park, R.: Inelastic behavior of reinforced concrete members with cyclic loading, Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering, Vol.4, No.1, pp.108-125, 1971.
- Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R.: Theoretical stress-strain model for confined concrete, *J. Struct. Eng*, Vol.114, Issue 8, pp.1804-1823, 1988.
- 14) Coleman, J. and Spacone, E.: Localization issues in nonlinear frame elements, Modelling of Inelastic Behavior of RC Structures Under Seismic Loads, ed. P. B. Shing and T. Tanabe, ASCE, pp.403-419, 2001
- Coleman, J. and Spacone, E.: Localization issues in force-based frame elements, *J. Struct. Eng*, Vol.127, Issue 11, pp.1257-1265, 2001.
- 16) Feenstra, P.H.: Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete, Dissertation, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1993
- Oliver, J.: A Consistent Characteristic Length for Smeared Crack Models, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.28, Issue2, pp.461-474, 1989.
- Rots, J.G.: Computational modeling of concrete fracture, Dissertation, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1988.