

論文 要素形状およびコンクリートの材料モデルが解析評価精度に与える影響に関する基礎的検討

井戸 崇仁*1・武田 健太*2・松原 左月*3

要旨：非線形解析により部材の構造性能評価を行う際、解の妥当性の判断は解析者に委ねられる。本研究では、部材の構造性能評価を高精度に行うために、要素形状やコンクリートの材料モデル等に着目し、三次元有限要素解析による基礎的な検討を行った。その結果、四面体要素を用いて部材の構造性能を高精度に評価するためには、要素数を六面体要素と同程度とし、2次要素を用いることで、六面体要素と同等な精度で評価可能であることが示された。さらに、コンクリートの材料モデルは、要素形状および要素の形状関数によらず、部材における鉄筋降伏までの構造性能には影響を及ぼさないことを確認した。

キーワード：有限要素解析, 要素形状, 形状関数, コンクリートの応力-ひずみ関係

1. はじめに

コンクリート部材の構造性能を定量的に評価する手法のひとつに、有限要素法を用いた数値解析がある。近年、計算機の性能向上により、解析対象は部材レベルから構造物レベルへと展開され、構造解析技術は格段に進歩している。解析技術を駆使することで、今後増加が懸念される劣化構造物に対しても、残存性能を十分な精度で評価可能と考えられる。しかしながら、数値解析を行うにあたり注意点が存在する。たとえば、要素寸法や節点数、材料モデル、求解法等の選定は解析者に委ねられ、解析者の経験により評価精度が左右される。これらを適切に選定したうえで、解の妥当性を検証することが肝要である。このうち、非線形解析ではコンクリートの応力-ひずみ関係は多数存在するため、過去の研究において様々なモデルが用いられている。また、三次元で構造物レベルの解析を行う際、構造形状が複雑な場合には、六面体で要素を作成できず四面体を用いなければならない。さらに、数値解析プログラムが多数存在することから、要素の作成方法やコンクリートの応力-ひずみ関係を解析プログラムの特性を把握したうえで選定し、解析方法を一般化する必要がある。そこで、本研究では、汎用有限要素解析ソフトウェアを用い、要素形状に四面体を使用した場合の解析傾向を六面体使用時と比較することで把握し、四面体を用いた場合の使用すべきコンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係を選定することを主目的とする。そのうえで、要素形状に四面体を用いた場合の適切な解析方法の提案を目指す。

2. 解析概要

解析プログラムには、汎用有限要素解析ソフトウェア

である ATENA Ver. 5.6.1¹⁾を用いた。本研究では、円柱供試体(3章)と RC 梁部材(4章)を対象に解析を行い、要素寸法およびその形状、形状関数、コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係の違いが解析結果に与える影響について検討した。まず、要素寸法の違いが解析結果に与える影響を検討するため、大小2種類の要素を用いた。また、四面体と六面体をそれぞれ用いることで要素形状の違いによる影響を検討した。モデル化の都合上、要素形状の違いによる影響の検討は4章でのみ行った。加えて、四面体については1次要素と2次要素をそれぞれ用いることで、形状関数の違いによる影響を検討した。なお、本研究ではソリッド要素を用い、四面体1次要素は4節点、四面体2次要素は10節点、六面体は8節点とした。

2.1 コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係

コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係の違いによる影響を考察するため、CEB-FIP Model code 1990²⁾(以下、モデル i)と斉藤・Nakamura らのモデル^{3),4)}(以下、モデル ii)を用いた。

モデル i は初期弾性係数に基づき最大応力時のひずみが決定する。たとえば、初期弾性係数が大きくなるほど最大応力時のひずみは大きくなる。また、ポストピーク域では応力が要素長さに基づき直線的に軟化するモデルである。このモデルは式(1)~(4)によって定式化され、概略図は図-1(a)のようになる。

$$\sigma'_c = \frac{kx - x^2}{1 + (k-2)x} f'_c \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

$$x = \frac{\epsilon'_c}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$k = \frac{E_0}{E_c} (= 2.0) \quad (3)$$

*1 名古屋工業大学大学院 工学研究科社会工学専攻 学士(工学) (学生会員)

*2 名古屋工業大学大学院 工学研究科社会工学専攻助教 博士(工学) (正会員)

*3 名古屋工業大学大学院 工学研究科社会工学専攻 学士(工学)

$$\varepsilon_d = \varepsilon_0 + \frac{w_d}{L} \quad (4)$$

ここに、圧縮強度を f'_c (N/mm²)、形状パラメータを k (=2.0)、初期弾性係数を E_0 (N/mm²)、割線弾性係数を E_c (N/mm²)、最大応力時のひずみを ε_0 ($=2f'_c/E_0$)、終局ひずみを ε_d 、限界圧縮変位を w_d ($=0.5$ mm)、要素長さを L (mm) とした。解析時の要素長さ L は要素寸法と等しくした。

モデル ii は圧縮強度および最大応力時のひずみに基づき初期弾性係数が決定するモデルである。たとえば、最大応力時のひずみを一定とし圧縮強度を大きくした場合、初期弾性係数は大きくなる。ポストピーク域においては、圧縮強度、圧縮破壊エネルギーおよび等価長さに基づき直線的に軟化するモデルである。このモデルは式(5)~(8)によって定式化され、概略図は図-1(b)のようになる。

$$f'_c = \begin{cases} \left\{ \frac{2\varepsilon'_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right\} f'_c & (0 \leq \varepsilon'_c \leq \varepsilon_0) \\ \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon'_c}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} f'_c & (\varepsilon_0 < \varepsilon'_c \leq \varepsilon_{cu}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon'_p = \varepsilon_0 - \frac{f'_c}{E_0} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{cu} = \frac{2G_{fc}}{L_c f'_c} + \varepsilon'_p \quad (7)$$

$$G_{fc} = 8.8 \sqrt{f'_c} \quad (8)$$

ここに、圧縮強度を f'_c (N/mm²)、初期弾性係数を E_0 (N/mm²)、最大応力時のひずみを ε_0 ($=0.002000$)、終局ひずみを ε_{cu} 、等価長さを L_c (mm)、圧縮破壊エネルギーを G_{fc} (N/mm) とした。解析時の等価長さ L_c は要素寸法と等しくした。

2.2 コンクリートの引張側の応力-ひずみ関係

引張側の応力-ひずみ関係は、応力が引張強度に至るまで、初期弾性係数に基づき応力が直線的に増加するものとし、到達後は指数関数に基づき軟化する Hordijk モデル⁵⁾を用いた。このモデルは、ひび割れ幅による破壊エネルギーに基づいたもので、式(9)~(12)で定式化される。

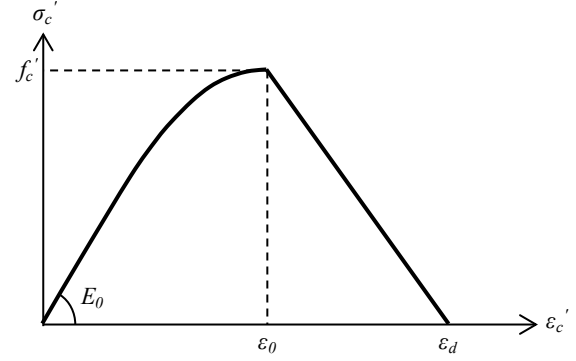
$$\sigma_t = \left[\left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_u} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_u} \right) - \frac{w}{w_u} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \right] f_t \quad (9)$$

$$w_u = 5.136 \frac{G_F}{f_t} \quad (10)$$

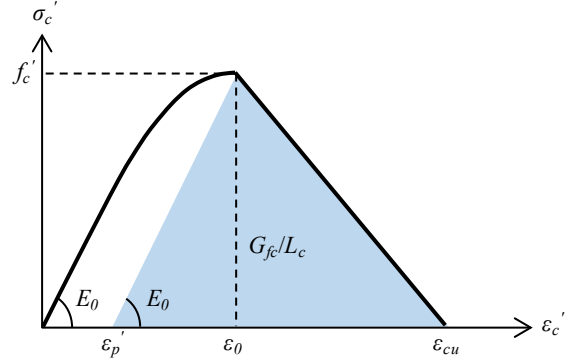
$$f_t = 0.23 f'_c{}^{2/3} \quad (11)$$

$$G_F = 10 d_{\max}^{1/3} f'_c{}^{1/3} \quad (12)$$

ここに、引張強度を f_t (N/mm²)、ひび割れ幅を w (mm)、限界ひび割れ幅を w_u (mm)、引張破壊エネルギーを G_F (N/m)、係数を c_1 , c_2 (それぞれ 3, 6.93)、粗骨材の最大寸法を $d_{\max}$ ($=20$ mm) とした。



(a) モデル i



(b) モデル ii

図-1 コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係

表-1 解析ケース

解析 ケース名	要素		コンクリート (圧縮側) 応力-ひずみ関係
	形状	形状関数	
B1-i	六面体	1 次	モデル i
B1-ii			モデル ii
T1-i	四面体	1 次	モデル i
T1-ii			モデル ii
T2-i		2 次	モデル i
T2-ii			モデル ii

※解析ケース名：(形状)，(形状関数)

- (コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係)

2.3 解析ケース

以上のように、要素寸法およびその形状、形状関数、コンクリートの圧縮側の応力ひずみ関係をパラメータとして解析を行った。要素寸法については 3 章、4 章で解析シリーズを分類し、他の検討項目は表-1 に示す解析ケースに分類した。

3. 円柱供試体の一軸圧縮強度試験と再現解析

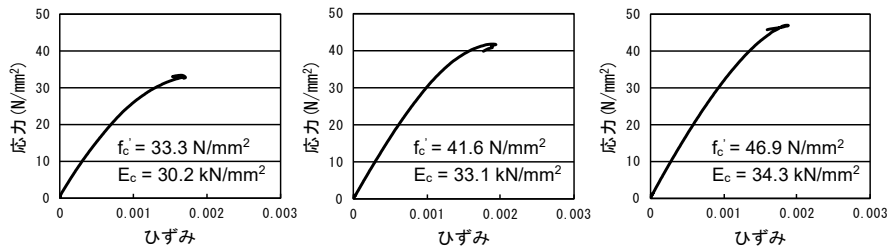
3.1 強度試験概要

円柱供試体の示方配合を表-2 に示す。設計基準強度を f_{ck} = 21.0, 27.0, 33.0 (N/mm²) とし、円柱供試体を各強度 1 本ずつ計 3 本作製し、それぞれ供試体 I, II, III とした。圧縮強度試験は JIS A 1108-2018 に準じて行った。また、ひずみゲージ(検長 60mm)を用いて供試体側面 4 ヶ所の鉛直方向のひずみを測定し、静弾性係数試験 (JIS A

表-2 示方配合

	f_{ck}' (N/mm ²)	W/C (%)	s/a (%)	単位量 (kg/m ³)				混和剤 (g/m ³)	
				W	C	S	G	Ad1	Ad2
I	21.0	67	48.6	176	263	864	973	2.63	1,841
II	27.0	53	45.8	176	332	790	993	3.32	2,822
III	33.0	44	44.0	176	400	734	993	4.00	4,000

※Ad1: AE 剤 Ad2: 減水剤



(a) 供試体 I ($f_{ck}'=21\text{N/mm}^2$) (b) 供試体 II ($f_{ck}'=27\text{N/mm}^2$) (c) 供試体 III ($f_{ck}'=33\text{N/mm}^2$)

図-2 圧縮強度試験結果

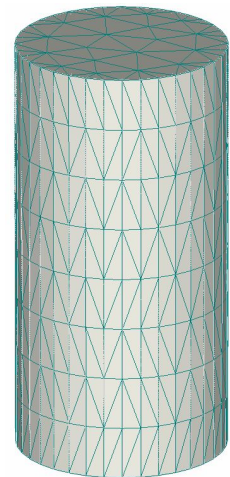


図-3 解析モデル(シリーズ I)

1149-2017)も併せて行った。

3.2 圧縮強度試験結果

試験より得た応力-ひずみ関係を図-2 に示す。図中には得られた圧縮強度と静弾性係数も示した。圧縮強度は全供試体が設計基準強度を満たし、圧縮強度の増加に伴い、静弾性係数も増加していることが確認できる。

3.3 再現解析概要

本解析における収束計算には、Newton-Raphson 法を用い、収束条件として、エネルギーノルムは 0.01%以下とし、収束計算の上限は 40 回とした。

(1) 円柱供試体のモデル化

円柱供試体の底面は円形、側面は曲面である。しかし、本解析プログラムでは曲線および曲面をモデル化できない。そこで、底面は、円の中心角が 10 度ずつとなるように円周上に節点を設け、多角形近似によりモデル化した。したがって、底面が正三十六形の角柱モデルに対して、一軸圧縮強度試験の再現解析を行った。

(2) 要素分割

2 章で述べたように、要素寸法の違いによる影響を検討した。四面体の寸法を 25mm, 30mm とし、それぞれシリーズ I, II とした(図-3 参照)。要素数は、シリーズ I は約 1,800 個、シリーズ II は約 1,300 個とした。

(3) コンクリートの物性値

解析上の圧縮強度、初期弾性係数には図-2 に示した試験結果の値を用いた。また、引張破壊エネルギー、引張強度はそれぞれコンクリート標準示方書⁹⁾より式(11)、式(12)を用いて圧縮強度から算出した。

(4) 計測点

計測点を角柱モデル側面の高さ中央の辺上に計 12 点設置し、鉛直方向の応力とひずみを計測した。

3.4 再現解析結果

シリーズ I, II の解析における、各供試体の応力-ひず

み関係の計測結果をそれぞれ図-4、図-5 に示す。比較のため、モデル i, ii の応力-ひずみ関係と一軸圧縮強度試験における応力-ひずみ関係(実験値)を記載した。

(1) 要素寸法による影響

シリーズ I, II の解析結果を各強度で比較する。最大応力に至るまでの応力-ひずみ関係に差は認められない。本研究の範囲内では、要素寸法の違いは、プレピーク域の解析結果に影響を与えないといえる。よって、以下の検討はシリーズ I のみで行う。

(2) 要素の形状関数による影響

表-3 に、シリーズ I における最大応力および最大応力時のひずみの比較を示す。1 次要素を用いた T1-i, T1-ii と 2 次要素を用いた T2-i, T2-ii をそれぞれ比較する。最大応力に着目すると、T1-i, T1-ii はやや過大評価し、T2-i, T2-ii は実験値と概ね一致した。形状関数の違いは解析結果に影響を与え、最大応力を適切に評価するには 2 次要素が適するといえる。

(3) コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係による影響

T1-i, T2-i と T1-ii, T2-ii をそれぞれ比較する。最大応力は概ね一致した。しかし、最大応力時のひずみは、モデル i を用いた T1-i, T2-i では、圧縮強度の増加に伴い、実験値との乖離がみられた。一方、モデル ii を用いた T1-ii, T2-ii では、概ね一致した。これは、最大応力時のひずみが、モデル ii では 0.002000 で一定であるのに対し、モデル i では圧縮強度が大きいほど増加することが要因に挙げられる。以上より、コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係の違いはプレピーク域のひずみに影響を与える。なかでも、モデル ii は圧縮強度によらずプレピーク域のひずみを概ね評価でき汎用性が高いといえる。

以上より、要素形状に四面体を用いて材料レベルの解析を行う際、要素寸法によらず、形状関数に 2 次要素を

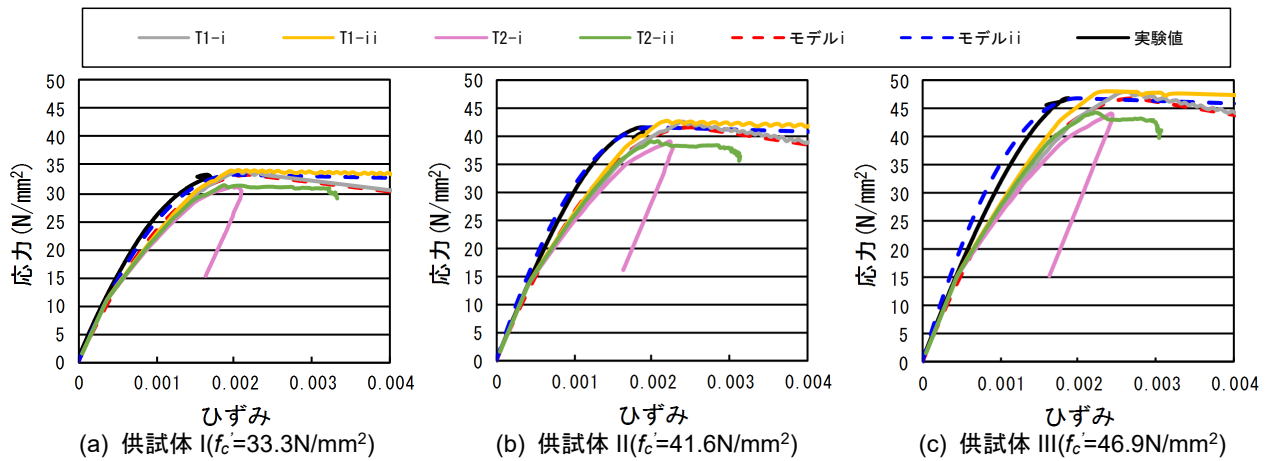


図-4 再現解析結果(シリーズ I)

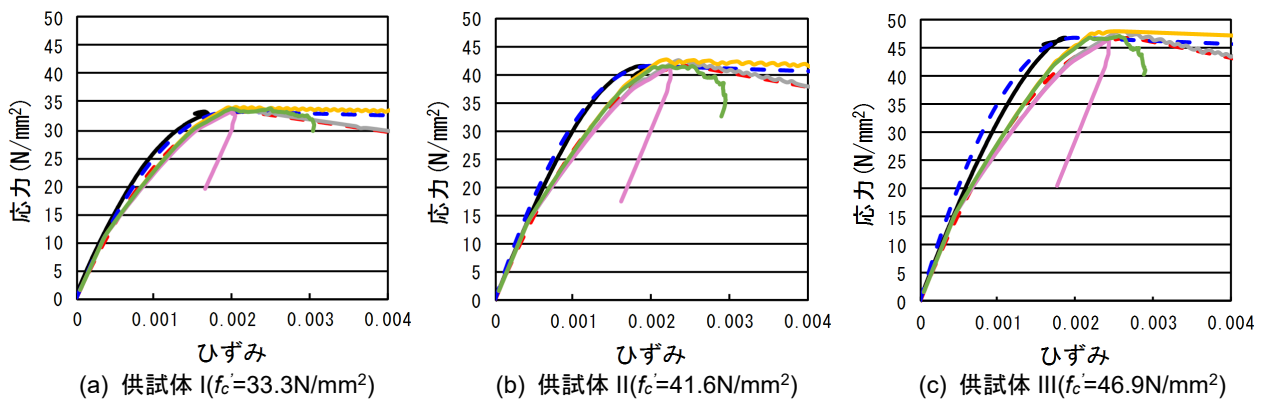


図-5 再現解析結果(シリーズ II)

表-3 最大応力および最大応力時のひずみの比較 (シリーズ I)

解析 ケース名	供試体 I		供試体 II		供試体 III	
	最大応力時 のひずみ	最大応力 (N/mm ²)	最大応力時 のひずみ	最大応力 (N/mm ²)	最大応力時 のひずみ	最大応力 (N/mm ²)
T1-i	0.002056	34.1	0.002408	42.6	0.002610	48.1
T1-ii	0.002056	34.1	0.002207	42.7	0.002408	48.2
T2-i	0.001970	31.2	0.002219	39.1	0.002418	44.2
T2-ii	0.001876	31.4	0.002062	39.1	0.002214	44.4
モデル i	0.002190	33.3	0.002505	41.6	0.002730	46.9
モデル ii	0.002000	33.3	0.002000	41.6	0.002000	46.9
実験結果	0.001645	33.3	0.001887	41.6	0.001866	46.9

使用し、加えてコンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係にモデル ii を用いることで、プレピーク域の応力とひずみを適切に評価できることがわかった。

4. RC 梁の曲げ 2 点载荷解析

4.1 解析概要

(1) 解析対象部材

本章では、断面 150×300 mm、支間 4,200 mm、せん断スパン 1,800 mm、有効高さ 270 mm の RC 梁を対象とした。载荷条件として、等曲げ区間 600 mm の 2 点集中载荷とした。主鉄筋には D19 を 2 本配筋した。なお、曲げ破壊となるように、せん断スパン比は 6.67 とし、せん断補強筋は配筋しなかった。

(2) 材料の物性値

コンクリートの圧縮強度と静弾性係数はそれぞれ 40 N/mm²、31 kN/mm² と仮定した。引張強度と引張破壊エネルギーは、式(11)、(12)よりそれぞれ圧縮強度から算出し、解析に用いた。

主鉄筋の降伏強度は 490 N/mm²、弾性係数を 200 kN/mm² と仮定した。鉄筋の応力-ひずみ関係には、終局時の荷重を梁理論⁹⁾による計算値と比較するため、降伏後のひずみ硬化を考慮しないパイリニア型を用いた。また、鉄筋はコンクリートと完全付着を仮定した。

(3) 要素分割

本章では、四面体を用いた解析を、従来から使用され高精度な解が得られる六面体と比較することで、解析精

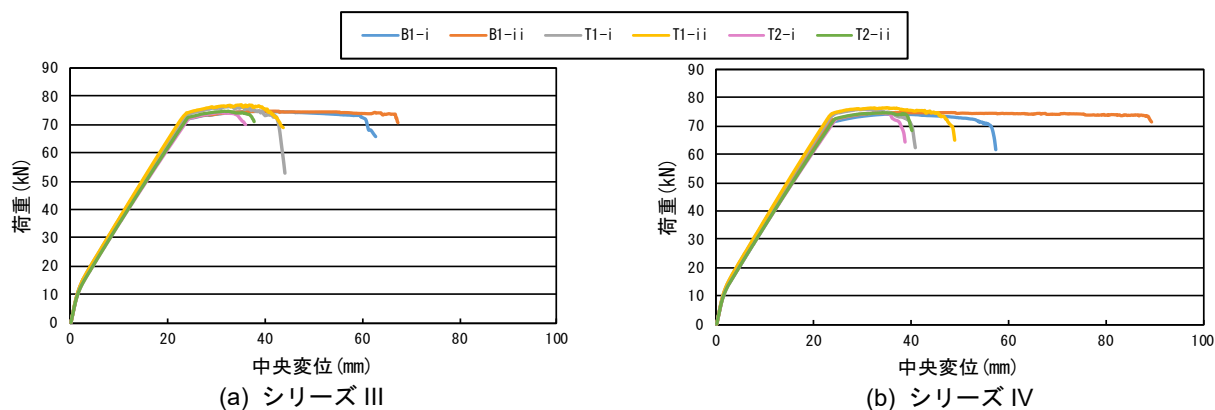


図-6 荷重－中央変位関係（シリーズ III, IV）

表-4 解析結果における変位および荷重の比較

シリーズ	解析 ケース名	曲げひび割れ		鉄筋降伏		最大荷重 (kN)	終局	
		変位 (mm)	荷重 (kN)	変位 (mm)	荷重 (kN)		変位 (mm)	荷重 (kN)
III	B1-i	0.82	6.54	23.70	71.62	74.56	60.68	71.56
	B1-ii	0.82	6.54	23.49	71.85	74.77	66.69	73.71
	T1-i	0.72	6.01	18.69	60.58	76.45	42.29	72.64
	T1-ii	0.72	6.01	18.59	60.74	76.87	43.33	69.48
	T2-i	0.72	5.73	24.12	71.26	74.17	35.98	69.97
	T2-ii	0.72	5.73	23.91	72.00	74.69	36.76	73.50
IV	B1-i	0.82	6.57	23.81	71.57	74.39	56.41	69.94
	B1-ii	0.82	6.57	23.70	71.94	74.55	88.93	73.01
	T1-i	0.72	6.15	19.83	64.11	76.13	40.05	70.25
	T1-ii	0.72	6.15	19.72	64.36	76.68	48.86	68.71
	T2-i	0.62	4.94	23.72	70.53	74.63	38.35	67.84
	T2-ii	0.62	4.94	23.41	70.44	74.87	39.44	73.40
理論値		0.72	5.72	22.32	72.05	73.16		

度の検証も行った。要素数の違いによる影響を排除するため、基準となる六面体の寸法を 25mm, 30mm, 四面体の寸法を 53mm, 66mm とし六面体と要素数を概ね等しくした。以上より、シリーズ III の寸法は六面体を 25mm, 四面体を 53mm, シリーズ IV の寸法は六面体を 30mm, 四面体を 66mm とした。要素数は、シリーズ III は約 13,000 個、シリーズ IV は約 7,300 個とした。

(4) 計測点

載荷版上面の強制変位を与える節点において反力を集計し、荷重とした。また、梁の支間中央部で鉛直変位を計測した。さらに、軸方向のひずみを、梁上面で 9 点、主鉄筋では 1 本あたり各 3 点の計 6 点を計測した。

4.2 解析結果

(1) 荷重－中央変位関係

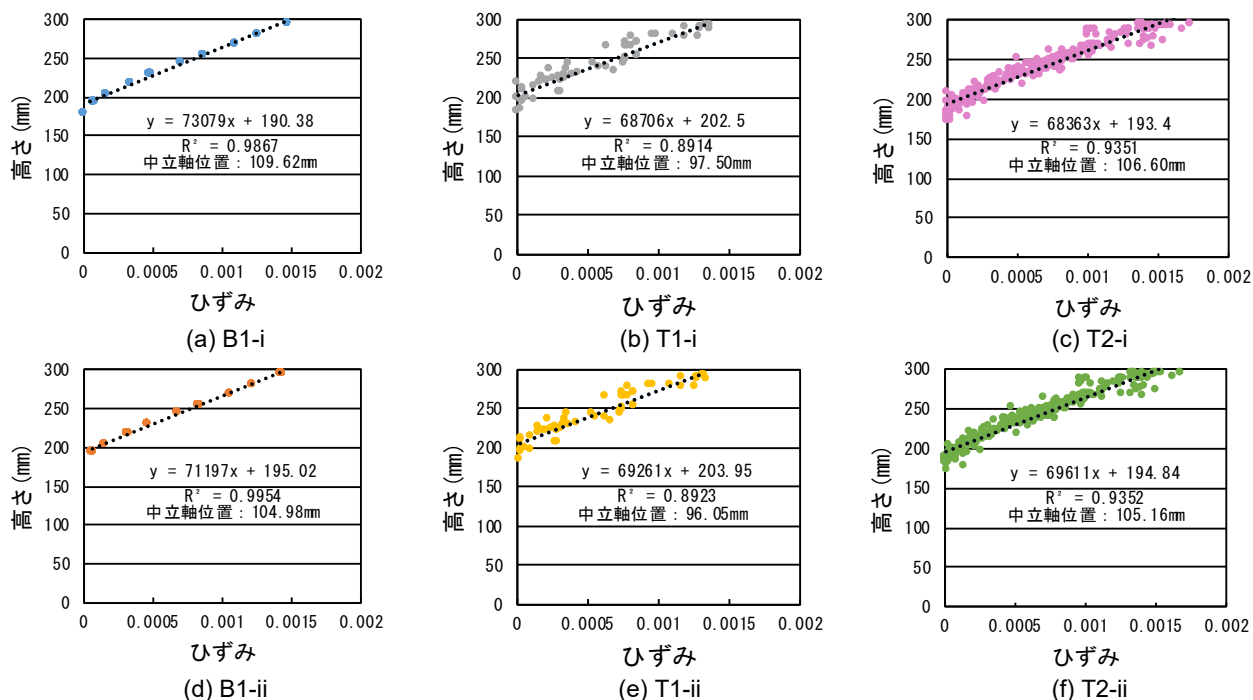
シリーズ III, IV の荷重－中央変位関係を図-6 に、各イベント時の変位と荷重を表-4 に示す。終局時は、荷重が低下し解が発散したときと定義し、表-4 には梁理論による計算値（理論値）も示した。

図-6 より、シリーズ III, IV を比較すると、各解析ケース同士の荷重や、鉄筋降伏までの変位には差がみられない。要素寸法の違いは鉄筋降伏までの構造性能に影響

を与えず、図-4 および図-5 と同様な傾向がみられたため、以下の検討はシリーズ III のみで行う。

次に、要素形状、形状関数による影響の検討を行う。B1-i と T1-i, T2-i を比較すると、T1-i は B1-i, T2-i に比べ最大荷重がわずかに大きくなった。また、鉄筋降伏時の荷重と変位を小さく見積もる傾向がみられた。表-4 より、B1-i と T2-i の各イベントにおける荷重は概ね一致していることがわかる。また、変位に関しても鉄筋降伏までは一致した。これらの傾向は B1-ii と T2-ii を比較した際にもみられる。さらに、シリーズ III における節点数は、四面体 1 次要素は約 52,000 個、四面体 2 次要素は約 130,000 個、六面体は約 101,000 個と、四面体 2 次要素と六面体ではオーダーが概ね同等となっている。以上より、要素数が同程度な場合、四面体 2 次要素を用いることで、六面体と同等の精度で、耐荷性能や鉄筋降伏までの変形性能の評価ができることがわかった。

コンクリートの圧縮側の応力－ひずみ関係による影響の検討を行う。要素形状および形状関数が同一な解析ケースを比較すると、荷重が概ね同等となっている。これは、図-4 および図-5 で示した結果と相違しない。一方、変位も鉄筋降伏までは概ね同等となったが、降伏後



図ー7 支間中央付近における圧縮側のコンクリートひずみ分布（シリーズ III）

は違いがみられた。終局変位に着目すると、四面体および四面体 1 次要素ではモデル i と ii で差がみられたが、四面体 2 次要素では差がみられなかった。これは、モデル i と ii におけるポストピーク域の軟化勾配に違いがあることが要因と考えられる。したがって、部材の耐荷性能および鉄筋降伏までの変形性能を評価する際、コンクリートの圧縮側の応力-ひずみ関係には、任意のモデルを適用可能である。しかし、鉄筋降伏後の変形性能を評価する際、使用する要素形状および形状関数に基づき、ポストピーク域におけるモデルを適切に選定する必要がある。この検討に関しては、今後の課題とする。

(2) 圧縮側のひずみ分布と中立軸位置（シリーズ III）

支間中央付近の要素中の積分点より、コンクリートひずみを抽出してプロットすると、図ー7 のようになる。抽出したひずみは、鉄筋降伏時のものであり、その回帰式より中立軸位置を算出した。図のように、T1-i、T1-ii は他の解析ケースに比べ、中立軸位置が小さくなっている。一方、B1-i、B1-ii、T2-i、T2-ii の中立軸位置は概ね同等となった。ここで、梁理論による中立軸位置の計算値（93.32 mm）と比較すると、T1-i、T1-ii が表現できているが、前節(1)で述べたように、四面体 1 次要素を用いた場合は、解析評価精度が低下することから、解析評価の際には適さないと考えられる。

5. まとめ

本研究では、部材の構造性能評価を高精度に行うために、要素形状やコンクリートの材料モデル等に着目し、三次元有限要素解析による基礎的な検討を行った結果、

以下の知見が得られた。

- (1) 四面体要素を用いて部材の鉄筋降伏までの構造性能を高精度に評価するためには、要素数を六面体要素と同程度とし、2 次要素を用いることで、六面体要素と同等な精度で評価可能であることが示された。
- (2) コンクリートの材料モデルは、要素形状および形状関数によらず、部材における鉄筋降伏までの構造性能には影響を及ぼさないことが確認された。

ただし、得られた知見は、本研究の解析プログラムを用いた場合に適用範囲が限定される。コンクリートの圧縮側の材料モデルにおけるポストピークモデルは部材の終局変位に大きく影響を与えるため、今後も検討を行う。

参考文献

- 1) Cervenka, V. et al.: ATENA program documentation, Cervenka Consulting, 2007.
- 2) CEB: CEB-FIP Model code 1990, Thomas Telford, 1993.
- 3) 斉藤ら：剛体パネモデルを用いた RC パネルのせん断二次破壊に関する解析的研究，土木学会論文集，No.704，V-55，pp. 219-234，2002.
- 4) Nakamura, H. et al.: Compressive fracture energy and fracture zone length of concrete, Seminar on Post-Peak Behavior of RC Structures Subjected to Seismic Load, JCI, pp. 259-272, 1999.
- 5) Hordijk, D, A.: Local Approach to Fatigue of Concrete, PhD thesis, Delft University of Technology, 1991.
- 6) 土木学会：2017 年制定コンクリート標準示方書[設計編]，2018.