論文　複素剛性表現によるRC１自由度質点系の等価線形地震応答解析

白井　和貴[*1]・五十子　幸樹[*2]・井上　範夫[*3]

要旨：鉄筋コンクリート構造物の地震時非線形挙動を等価線形系の応答で近似評価することを想定し，減衰要素として変位依存型の複素剛性を有する等価線形１自由度質点系モデルを対象として，周波数領域の地震応答解析を行った。また比較のため速度依存型の粘性減衰モデルによる解析を行った。複素剛性と粘性減衰の解析結果を比べると，最大応答変位は若干の差異が生じるが顕著な違いはみられず，最大減衰力と累積消費エネルギーには明瞭な差異が現れ，塑性率が大きく初期周期が長いほど差異が拡大する傾向を示した。

キーワード：複素減衰，粘性減衰，減衰定数，伝達関数，周波数応答解析

1. はじめに

鉄筋コンクリート（RC）構造物の地震時非線形挙動を，等価な剛性と減衰を有する等価線形系の応答で近似して評価する場合，減衰要素には速度依存型の粘性減衰を用いることが一般的である。

一方，変位依存型の減衰要素として複素剛性が挙げられるが，複素数を扱うために時間領域での応答解析が通常の方法では難しい等の理由から，RC 造を対象とする等価線形解析で用いられることは少ない。

RC 部材の非線形復元力特性は，変形の関数による履歴モデルで通常模擬されるように変位依存性が支配的であり，載荷速度の影響はあまり大きくないといえる。よって，等価線形化による応答解析モデルの減衰要素として複素剛性を用いることで，RC 構造の履歴減衰性状をより直接的に表現可能と考えられる。

本論では，複素剛性を有する等価線形１自由度質点系モデルを対象とし，RC 架構の塑性化に伴う剛性と減衰の変化を考慮した周波数地震応答解析を行い，減衰要素がダッシュポットの場合と比較した結果を述べる。

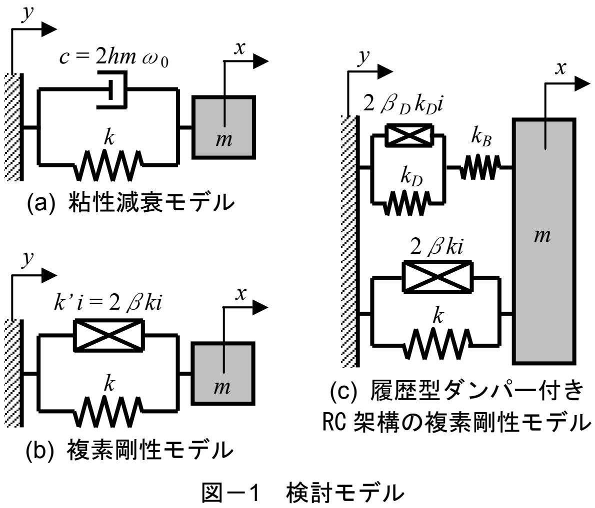
なお本検討は，履歴型ダンパーを有する RC 架構の制振設計に関する研究[1)]の一環であり，足掛かりとして本論では制振ダンパーが無い RC 架構を対象としている。

2. 検討モデル

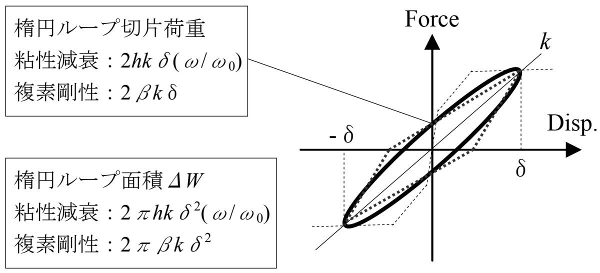
検討モデルとして，図－1 に示す異なる減衰要素を有する１自由度質点系モデルを用いた。(a)は速度依存型のダッシュポットを有する粘性減衰モデル，(b)は変位依存型の複素ばねを有する複素剛性モデルである。ここで x は応答変位，y は地動変位，m は質点質量，k はばね剛性，c は粘性減衰係数，h は粘性減衰定数，ω_0 は無減衰固有円振動数（$=\sqrt{(k/m)}$），k'は複素剛性の虚部，i は虚数単位，βは複素減衰定数である。

なお図－1 (c)は前述の履歴型ダンパーを有する RC 制振架構の複素剛性モデルであり，本論の対象外ではあるが参考のために示した。ここで k_B は支持部材剛性，k_D はダンパー剛性，β_Dはダンパーの複素減衰定数である。

RC 架構の非線形復元力特性を図－2 に示すように等価な剛性と減衰を有する等価線形系に置き換える。ここで δは定常振動時ピーク変位，ωは外力の円振動数である。楕円ループ 1 サイクル当たりの消費エネルギーΔW は，粘性減衰では $2\pi hk\delta^2(\omega/\omega_0)$であり ωに依存するが，複素剛性では $2\pi\beta k\delta^2$ となり ωに依存しない。



図－1　検討モデル



図－2　等価線形ループ（定常振動時）

*1 （株）大林組技術研究所　工修　(正会員)
*2 東北大学大学院工学研究科　准教授・博士（工学）　(正会員)
*3 東北大学大学院工学研究科　教授・工博　(正会員)

3. 線形振動特性

3.1 自由振動

まず1自由度系の線形振動特性について比較する。

速度依存型の粘性減衰モデルの減衰自由振動は下式で表せる。ここで $\ddot{x}$ は応答加速度，$\dot{x}$ は応答速度である。

$$m\ddot{x}+2hm\omega_0\dot{x}+kx=0 \tag{1}$$

式(1)の複素固有値 λ_V，自由振動の解（h<1）は下式で表せる。t は時間，A_V と A_V^* は複素共役な未定係数である。

$$\lambda_V=-h\omega_0\pm i\sqrt{1-h^2}\,\omega_0 \tag{2}$$

$$x=e^{-h\omega_0 t}\left(A_V e^{i\sqrt{1-h^2}\,\omega_0 t}+A_V^* e^{-i\sqrt{1-h^2}\,\omega_0 t}\right) \tag{3}$$

非減衰周期 T に対し，粘性減衰モデルの自由振動周期 T_V は下式で表され，h の増加に伴い T_V は長周期化する。

$$T_V=T\Big/\sqrt{1-h^2} \tag{4}$$

一方，変位依存型の複素剛性モデルの減衰自由振動を式(5)のように表せば，粘性減衰の場合と同様の式展開により，複素剛性モデルの複素固有値 λ_C および自由振動解として式(6)(7)が導かれる。ここで sgn(ω) = 1（ω>0），−1（ω<0）であり，A_C と A_C^* は複素共役な未定係数である。また，複素剛性モデルの自由振動周期 T_C として式(8)が得られ，β の増加に伴い T_C は短周期化する。

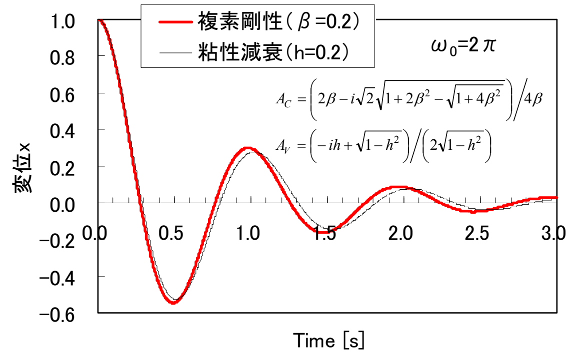
$$m\ddot{x}+(1+2\beta i\,\mathrm{sgn}(\omega))kx=0 \tag{5}$$

$$\lambda_C=-\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+4\beta^2}}}{\sqrt{2}}\omega_0\pm i\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4\beta^2}}}{\sqrt{2}}\omega_0 \tag{6}$$

$$x=e^{-\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+4\beta^2}}}{\sqrt{2}}\omega_0 t}\left(A_C e^{i\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4\beta^2}}}{\sqrt{2}}\omega_0 t}+A_C^* e^{-i\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4\beta^2}}}{\sqrt{2}}\omega_0 t}\right) \tag{7}$$

$$T_C=T\sqrt{2}\Big/\sqrt{1+\sqrt{1+4\beta^2}} \tag{8}$$

式(3)(7)で $x(0)$=1，$\dot{x}(0)$=0 となる未定係数を与え，同条件（h=β=0.2，ω_0=2π）に設定した自由振動波形を**図−3** に示す。粘性減衰と比べて複素剛性の方が周期が若干短く振幅がやや大きい（減衰しにくい）ことが分かる。



図−3　減衰自由振動波形の比較

3.2 伝達関数

調和地動加速度 $\ddot{y}$ を受ける粘性減衰モデルの振動方程式は式(9)で表される。また $\ddot{x}$ =− $\omega^2 x$，$\dot{x}=\omega ix$ と置くことで式(10)が得られる。

$$m\ddot{x}+2hm\omega_0\dot{x}+kx=-m\ddot{y} \tag{9}$$

$$\left(-\omega^2+2h\omega_0\omega i+\omega_0^2\right)x=-\ddot{y} \tag{10}$$

入力を $\ddot{y}$，出力を x とする場合の伝達関数 $H_D(i\omega)$ およびその振幅 $|H_D(i\omega)|$ は下式で表せる。

$$H_D(i\omega)=\frac{1}{\omega^2-2h\omega_0\omega i-\omega_0^2} \tag{11}$$

$$|H_D(i\omega)|=\sqrt{\frac{1}{(2h\omega_0\omega)^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}} \tag{12}$$

一方，調和地動を受ける複素剛性モデルの振動方程式，伝達関数とその振幅は下式で表せる（ω>0）。

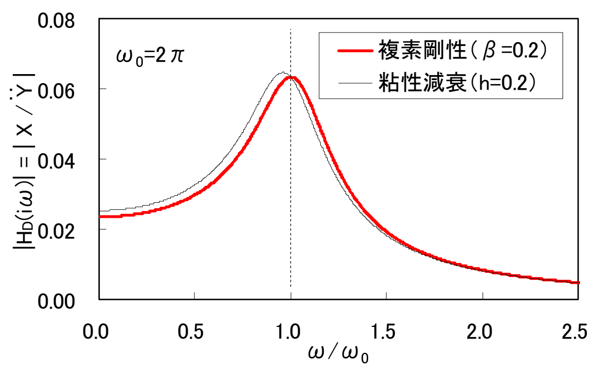
$$m\ddot{x}+(1+2\beta i)kx=-m\ddot{y} \tag{13}$$

$$\left(-\omega^2+2\beta\omega_0^2 i+\omega_0^2\right)x=-\ddot{y} \tag{14}$$

$$H_D(i\omega)=\frac{1}{\omega^2-2\beta\omega_0^2 i-\omega_0^2} \tag{15}$$

$$|H_D(i\omega)|=\sqrt{\frac{1}{\left(2\beta\omega_0^2\right)^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}} \tag{16}$$

式(12)(16)で同条件（h=β=0.2，ω_0=2π）に設定した場合の伝達関数の振幅 $|H_D(i\omega)|$ の比較を**図−4** に示す。外力の円振動数 ω と系の無減衰固有円振動数 ω_0 が等しい点（ω/ω_0= 1 となる点）で粘性減衰と複素剛性の振幅は交差（一致）する。ω/ω_0 が 1 よりも高振動数側では複素剛性の方が振幅が大きく，ω/ω_0 が 1 よりも低振動数側では粘性減衰の方が振幅が大きくなっている。



図−4　伝達関数の振幅の比較

次に，式(12)(16)の伝達関数の振幅 $|H_D(i\omega)|$ における特性式の比較を**表−1** に示す。$|H_D(i\omega)|$ を円振動数 ω で偏微分して極値を求めることで，振幅ピーク点における円振動数 ω_{peak} とピーク振幅 $|H_D(i\omega)|_{peak}$ が得られる。同じ減衰

定数 h と β を与える場合，複素剛性の方が，ピーク振動数が高くピーク振幅が小さくなる。

振幅 $|H_D(i\omega)|$ の 2 乗積分は，パワースペクトル密度が 1 のホワイトノイズ入力を受ける系の応答変位の 2 乗平均に相当し，留数定理の適用により数式解を導出することができる。同じ h と β を与える場合，複素剛性の方が 2 乗積分値は小さくなる。

なお，**表－1** は入力を絶対加速度，出力を相対変位とする伝達関数の場合であり，入力と出力の条件が異なれば**表－1** とは違う特性式が得られることを付記しておく。

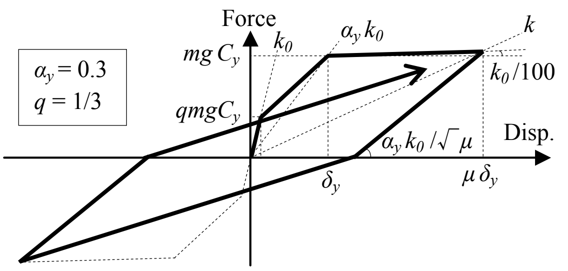
表－1　伝達関数（相対変位／絶対加速度）の特性式

$\lvert H_D(i\omega)\rvert = \lvert X/\ddot{Y}\rvert$	粘性減衰	複素剛性
ピーク振動数比 ω_{peak}/ω_0	$\sqrt{1-2h^2}$	1
ピーク振幅 $\lvert H_D(i\omega)\rvert_{peak}$	$\dfrac{1}{2h\sqrt{1-h^2}\,\omega_0^{\,2}}$	$\dfrac{1}{2\beta\omega_0^{\,2}}$
2 乗積分 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lvert H_D(i\omega)\rvert^2 d\omega$	$\dfrac{1}{4h\omega_0^{\,3}}$	$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4\beta^2}}{2(1+4\beta^2)}}\,\dfrac{1}{4\beta\omega_0^3}$

4. 地震応答解析手法

4.1 想定する復元力特性

RC 架構の非線形履歴特性として，**図－5** に示す Degrading Tri-linear 型モデルを想定した。ここで C_y は降伏せん断力係数，g は重力加速度，k_0 は初期剛性，α_y は降伏時剛性低下率，k は等価剛性，q はひび割れ強度の降伏強度に対する比，δ_y は降伏変位，μ は塑性率である。



図－5　復元力特性

4.2 等価剛性および等価減衰の設定

RC 架構の復元力特性を，損傷の進行に伴う剛性低下と減衰増大を考慮した等価線形系で近似的に表すため，等価剛性および等価減衰を次のように設定した。

等価剛性 k は，復元力特性の定常履歴ループにおける変位最大点と原点を結ぶ割線剛性とし，塑性率 μ の関数として式(17)で与えた。

等価減衰を表す粘性減衰定数 h および複素減衰定数 β は，柴田による等価減衰[2), 3)]の式を用い塑性率 μ の関数として式(18)で与えた。初期減衰定数を 0.02，過渡応答の非定常性を考慮した低減係数を 0.2 と設定しており，減衰定数は μ ＝2 で 7.9%， μ ＝4 で 12%の値をとる。

$$
\begin{aligned}
k &= k_0 && (0 \le \mu < q\alpha_y) \\
&= \frac{k_0\alpha_y}{\mu}\left\{q + \frac{(\mu - q\alpha_y)(1-q)}{(1-q\alpha_y)}\right\} && (q\alpha_y \le \mu < 1) \\
&= k_0\alpha_y/\mu && (1 \le \mu)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

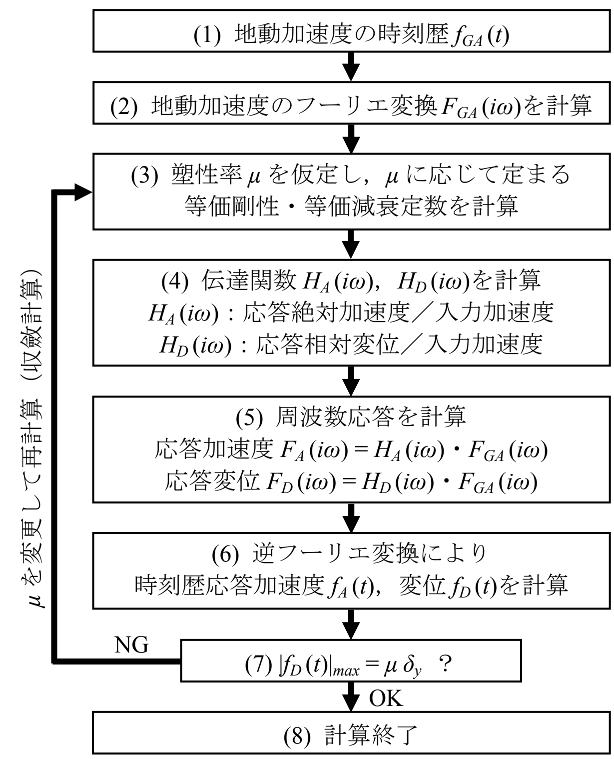
$$
\begin{aligned}
h,\ \beta &= 0.02 && (0 \le \mu < 1) \\
&= 0.02 + 0.2\left(1 - 1/\sqrt{\mu}\right) && (1 \le \mu)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

なお式(17)(18)とも，弾性，ひび割れ以降，降伏以降で場合分けし，簡略化のため降伏後剛性 $k_u = 0$ としている。

初期周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{(m/k_0)}$ を与えることで式(17)(18)より塑性率 μ に応じた等価剛性と等価減衰定数が定まる。μ を最大応答変位に換算する際には，後述する所要耐力スペクトル計算で得られたせん断力係数 C_y から求まる，各入力波および各 T_0 に対応する降伏変位 δ_y を用いる。

4.3 周波数応答解析の手順

線形解析および等価線形解析では，複素剛性と粘性減衰の両モデル共に周波数領域で地震応答計算を行った。等価線形解析における計算手順を**図－6** に示す。なお一般に，複素剛性を扱う場合は因果性が成立しない[例えば 4)]が，本論では因果性の問題については不問としている。

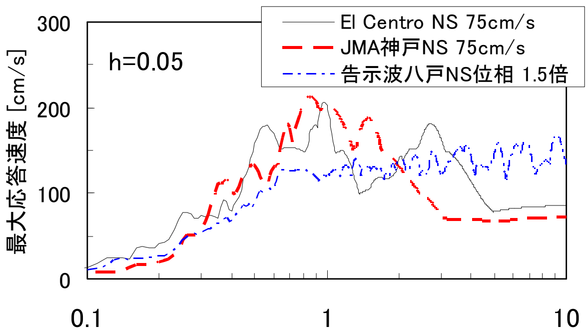


図－6　周波数応答解析のフロー（等価線形解析）

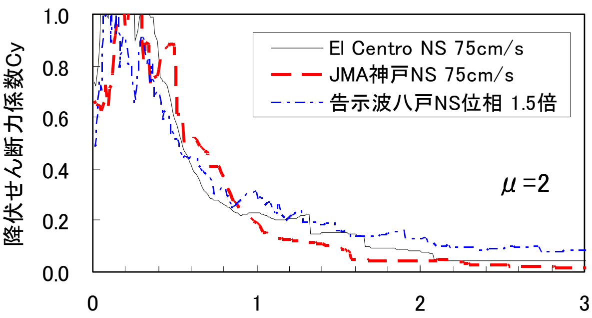
4.4 入力地震動

入力地震波として，El Centro NS（1940 Imperial Valley 地震，最大速度 75cm/s 基準化），JMA 神戸 NS（1995 兵庫県南部地震，最大速度 75cm/s 基準化），告示波八戸 NS 位相（告示スペクトル適合波，解放工学的基盤，1968 十勝沖地震の八戸港湾 NS 位相特性，振幅 1.5 倍）の 3 波を使用した。速度応答スペクトルを**図－7** に示す。

各入力波の所要耐力スペクトル（$\mu=2$）を**図－8** に示す。所要耐力スペクトルは，**図－5** の復元力特性モデルを用いた非線形時刻歴応答解析（Newmark-β法，減衰は降伏時剛性比例とし h=0.02）により計算した。初期周期 T_0 を横軸として変化させ，最大応答変位がある一定の塑性率をとるときの降伏せん断力係数 C_y を収斂計算により求めて縦軸にプロットした。こうして各入力波および各 T_0 について得られた非線形時刻歴解析で $\mu=2, 4$ となる C_y を，等価線形解析の際に設定した。



図－7 速度応答スペクトル



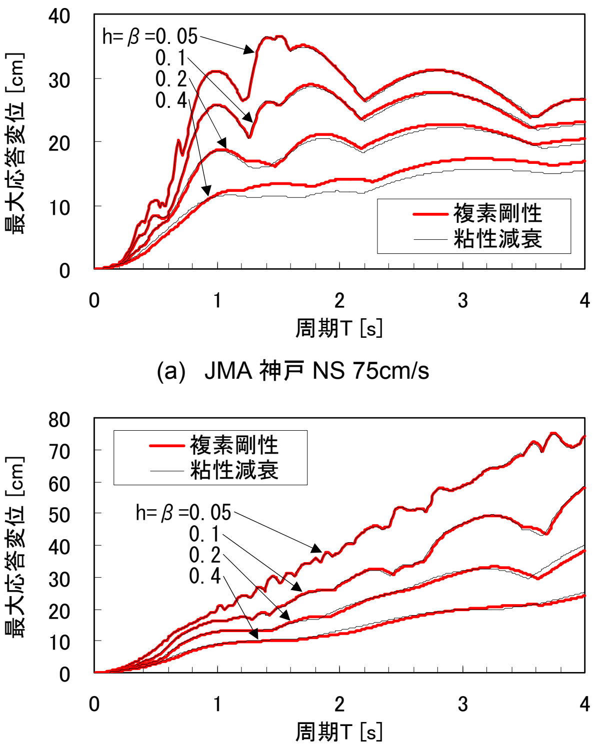
図－8 所要耐力スペクトル

5. 解析結果

5.1 線形解析結果

先ず，線形系の地震応答解析結果について述べる。JMA 神戸 NS 75cm/s および告示波八戸 NS 位相 1.5 倍入力に対し，同じ減衰定数（$h=\beta$=0.05，0.1，0.2，0.4）を与えた線形の複素減衰モデルと粘性減衰モデルの変位応答スペクトルの比較を**図－9** に示す。

減衰定数 0.05 では複素剛性と粘性減衰でスペクトルはほぼ一致し，減衰定数が 0.1，0.2，0.4 と大きくなるほど複素剛性モデルと粘性減衰モデルの差異が拡大する傾向が認められる。しかし全体的には複素剛性と粘性減衰で最大変位に顕著な違いは生じていないといえる。



(a) JMA 神戸 NS 75cm/s

(b) 告示波八戸 NS 位相 1.5 倍

図－9 変位応答スペクトルの比較（線形解析）

5.2 等価線形解析結果

(1) 最大変位の比較

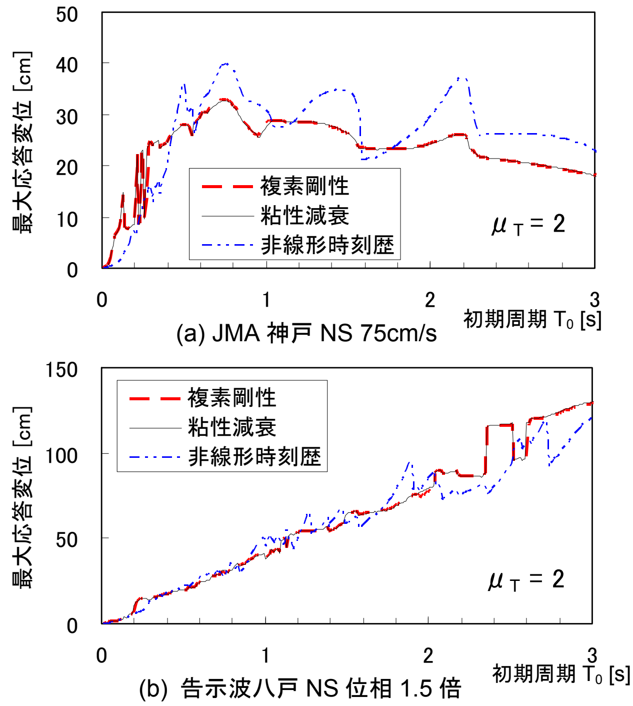
続いて，等価線形系の地震応答解析結果について述べる。JMA 神戸 NS 75cm/s および告示波八戸 NS 位相 1.5 倍入力に対し，目標塑性率 μ_T（前述の所要耐力スペクトルで C_y を計算する際に設定した塑性率）を 2 とし，初期周期 $T_0=2\pi\sqrt{(m/k_0)}$を変化させた場合の，等価線形解析による複素剛性モデルと粘性減衰モデルの最大応答変位のスペクトルを**図－10** に示す。

目標塑性率が 2 の場合，式(18)の等価減衰定数で 7.9% 程度に相当するが，この程度の減衰では複素剛性と粘性減衰で最大応答変位は全体的にほぼ一致している。

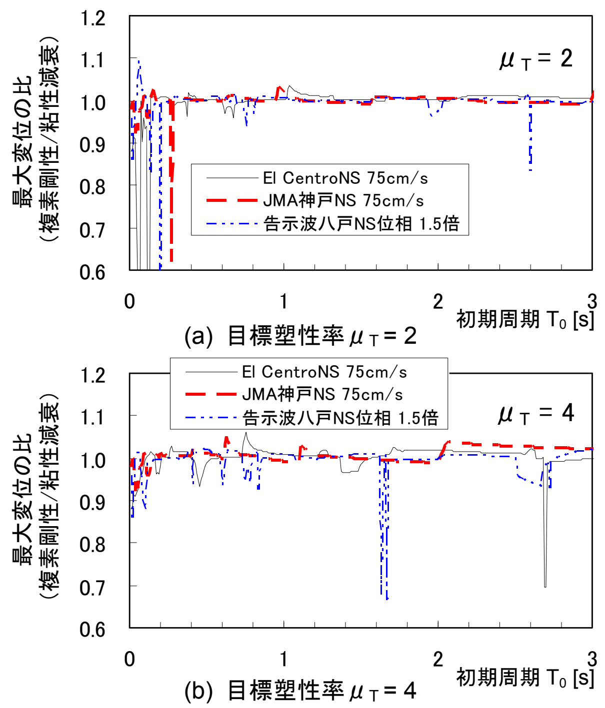
また，非線形時刻歴解析（μ=2）による最大変位を**図－10** に併せて示す。両減衰モデルの等価線形解析結果は，非線形時刻歴解析結果に対してばらつきはあるが概ね対応しており，特に告示波八戸 NS 位相で精度が良い。

次に，等価線形解析における両減衰モデルの最大変位の差異を詳しく調べるため，各入力波について $\mu_T=2$ および 4 とし T_0 を変化させた場合の，複素剛性モデルの粘性減衰モデルに対する最大変位の比を**図－11** に示す。

μ_T = 2，4 の場合ともに，複素剛性と粘性減衰の最大応答変位の違いは総じて僅かであり，差異のオーダーとしては数%程度である。ただし，複素剛性の最大変位が数割ほど小さくなる周期も数カ所あり，やや大きな差異が生じる事もあることが分かる。この要因として，複素剛性の等価周期が粘性減衰と比べて若干短いため，入力波のスペクトル特性が急激に変化する周期付近で，両減衰モデルの最大変位の差異が拡大したと考えられる。



図−10　最大変位（等価線形解析，非線形時刻歴解析）

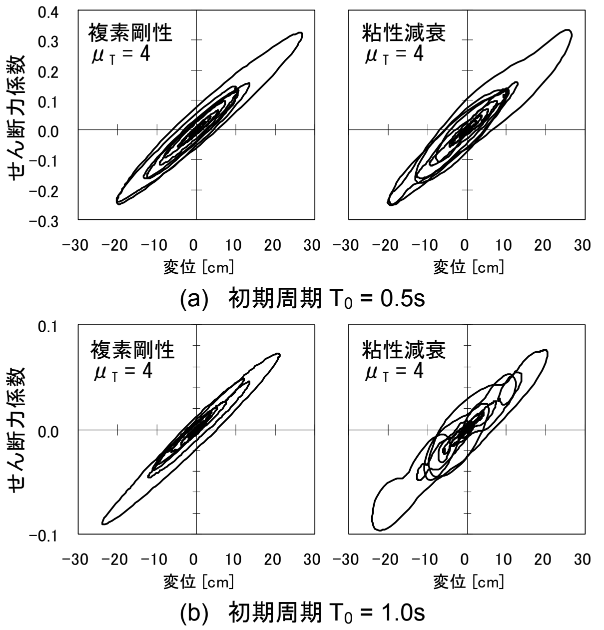


図−11　最大応答変位の比（等価線形解析）

(2) 履歴ループ形状の比較

等価線形解析における複素剛性モデルと粘性減衰モデルの履歴ループの比較例として，JMA 神戸 NS 75cm/s 入力，目標塑性率 μ_T = 4，初期周期 T_0 = 0.5 s および 1.0s の場合の応答慣性力−変位関係を図−12 に示す。縦軸はせん断力係数で表示している。

粘性減衰ではやや乱れた楕円ループを描いているのに対し，複素剛性では比較的整った楕円形状を示す傾向が認められる。また，粘性減衰の方が複素剛性と比べて膨らんだループを呈している。これらの性状は，初期周期が T_0 = 0.5 s よりも 1.0s の場合の方が顕著である。



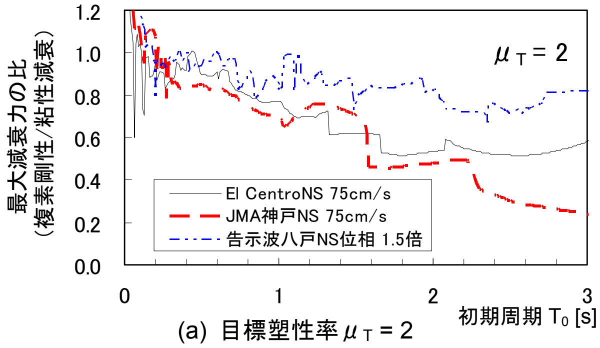
図−12　履歴ループの比較（等価線形解析）

(3) 最大減衰力の比較

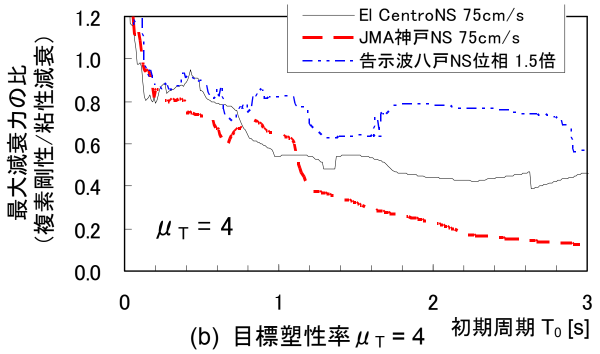
次に，等価線形解析において，各入力波に対し μ_T = 2，4 として T_0 を変化させたときの，複素剛性モデルの粘性減衰モデルに対する最大減衰力の比を図−13 に示す。ここで最大減衰力は，応答慣性力と復元力の差から求まる減衰力の最大値 $|-m f_A(t) - k f_D(t)|_{max}$ として計算した。

T_0 が長く μ_T が大きい程（すなわち等価周期が長い程），最大減衰力の比が顕著に低下し，複素剛性の方が粘性減衰と比べて減衰力が小さくなる傾向がみられる。このことは図−12 の履歴ループで示された性状とも合致している。逆に，T_0 が約 0.2s より短周期側では，複素剛性の方が粘性減衰と比べて減衰力が大きくなる傾向にある。

これらは，系の固有周期と外乱の卓越周期との位置関係により減衰要素の速度依存性の有無の違いが現れたと考えられる。構造物の等価周期が地震動の卓越周期よりも長い場合は，速度依存型の粘性減衰の方が変位依存型の複素剛性よりも大きな減衰力を発揮するといえる。



(a) 目標塑性率 $\mu_T = 2$

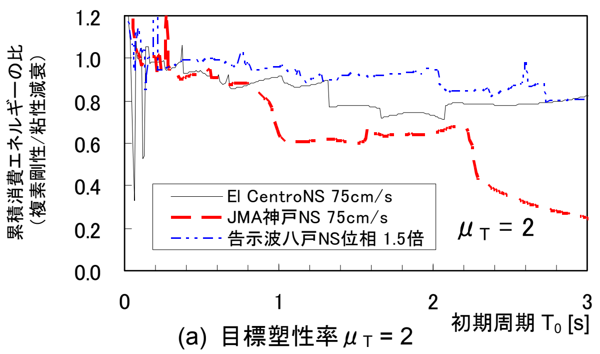


(b) 目標塑性率 $\mu_T = 4$

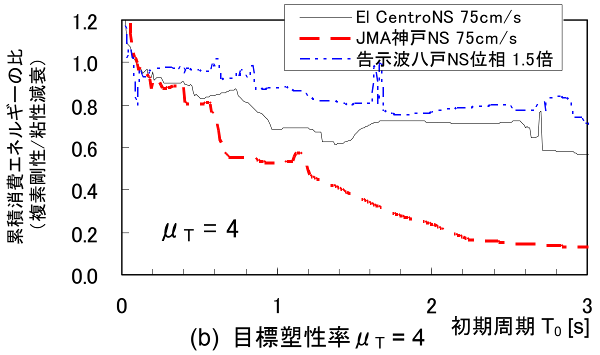
図－13　最大減衰力の比較（等価線形解析）

(4) 累積消費エネルギーの比較

最後に，等価線形解析における複素剛性モデルの粘性減衰モデルに対する累積消費エネルギーの比を図－14に示す。これまでと同様，各入力波に対して目標塑性率 $\mu_T = 2$，4 とした。横軸は初期周期 T_0 を変化させ，縦軸は応答慣性力－変位関係から計算される消費エネルギーの累積値の比（すなわち地震動による総入力エネルギーの比に相当）で表示している。



(a) 目標塑性率 $\mu_T = 2$



(b) 目標塑性率 $\mu_T = 4$

図－14　累積消費エネルギーの比較（等価線形解析）

最大減衰力の場合と同様に，T_0 が長く μ_T が大きくなると，複素剛性の方が粘性減衰と比べて総入力エネルギーが小さくなる傾向が認められる。複素剛性モデルと粘性減衰モデルで，図－11 に示されたように最大応答変位に顕著な違いは生じないが，図－13 に示されたように最大減衰力の差異は大きくなるため，1 サイクル当たりの履歴ループ面積に違いが生じ，その累計である累積消費エネルギーの差異が顕著に拡大したと考えられる。

6. まとめ

減衰要素として変位依存型の複素剛性あるいは速度依存型の粘性減衰を有する 1 自由度質点系モデルを対象に，RC 架構の塑性化に伴う剛性と減衰の変化を考慮した周波数領域の等価線形解析を行った。両減衰モデルの地震応答性状の比較から得られた知見を述べる。

(1) 複素剛性モデルと粘性減衰モデルの自由振動解，伝達関数などの線形振動特性を整理比較した。同じ減衰定数を与える場合，複素剛性モデルの方が粘性減衰モデルと比べ周期が短くなることを確認した。

(2) 線形解析の結果，同じ減衰定数を与えた場合，減衰定数が大きいほど複素剛性モデルと粘性減衰モデルの最大応答変位の差異が拡大する傾向がみられたが，全体的に大きな違いは生じなかった。

(3) 等価線形解析の結果，複素剛性モデルと粘性減衰モデルで最大応答変位には若干の差異が生じるが顕著な違いはみられなかった。一方，最大減衰力と累積消費エネルギーには明瞭な違いが現れ，塑性率が大きく初期周期が長いほど差異が拡大する傾向を示した。構造物の等価周期が地震動の卓越周期よりも長い場合，速度依存型の粘性減衰の方が変位依存型の複素剛性よりも減衰力および累積消費エネルギーが大きくなるといえる。

今後の展開として，本論の内容を発展させ，履歴型ダンパー付き RC 架構を対象とし等価線形系の複素剛性モデルによる制振設計問題について検討する予定である。

参考文献

1) 白井，蔭山，五十子，井上：伝達関数に基づく履歴型ダンパー付き等価線形架構の制震設計に関する検討，AIJ 大会学術講演梗概集，pp.497-498，2009.8

2) Shibata, A. and Sozen, M.A. : Substitute-Structure Method for Seismic Design in R/C, Proc. of ASCE, Vol.102, St 1,pp.1-18, Jan.1976

3) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版，1981.6

4) J. A. Inaudi and J. M. Kelly : Linear Hysteretic Damping and the Hilbert Transform, J. Eng. Mech., Vol.121, No.5, ASCE, pp.626-632, May 1995