

論文 チモシェンコ梁要素を用いた曲げとせん断を受ける RC 梁の材料非線形解析

越川 武晃^{*1}・上田 正生^{*2}・菊地 優^{*3}

要旨：ファイバーモデルを用いて曲げとせん断を受ける RC 梁に発生する斜めせん断亀裂を表現する一手法として、チモシェンコ梁要素を用いた RC 梁の材料非線形解析法を提案した。まず有限要素法への定式化の概要と、垂直応力と横せん断応力による 2 軸応力状態を想定したコンクリートの構成則の取扱いについて記述した。更に、既往の実験結果を対象とした数値計算例を示し、コンクリートに 1 軸の構成則を用いた従来の解析法との比較を通して、本解析法による荷重-変位応答、亀裂の発生・分布性状について検証した。

キーワード：RC チモシェンコ梁要素、横せん断応力、2 軸応力状態、材料非線形解析

1. はじめに

RC 部材におけるせん断挙動は、多くの要因が互い影響を及ぼし合いながら、複雑な破壊進展プロセスを呈する現象である。コンクリート構造解析の分野では、これまでこのせん断挙動の解析は専ら 2 次元有限要素法を用いて行われてきた。2 次元有限要素法は、様々な形状の RC 部材に対して適用でき、部材における詳細な挙動を追跡し得るところにその特徴がある。

一方、梁理論に基づく有限要素法は主として曲げ部材の変形挙動を対象としたものであるが、このうち曲げに及ぼす横せん断変形の影響を簡便に取り扱うことが可能な要素に、チモシェンコ梁要素がある。この要素によれば、2 次元有限要素法に比べて遥かに少ない自由度で、曲げとせん断を同時に受ける RC 曲げ部材の全体的な変形挙動を追跡し得る可能性がある。このような観点から、近年、チモシェンコ梁要素を用いた RC 梁の材料非線形解析法がいくつか報告されている^{1),2)}。しかしながら、この要素を用いて時々刻々と変化する RC 梁の応力状態やせん断剛性を的確に評価し、コンクリートの斜めせん断亀裂までも表現可能な解析手法となると、現時点においては殆ど見当たらないのが

現状のようである。

本研究は、チモシェンコ梁理論に準拠した著者等の有限要素弾性解析法³⁾を発展・拡張させ、ファイバーモデルを用いて RC 梁に発生する斜めせん断亀裂を表現するための一手法として、コンクリートに垂直応力と横せん断応力による 2 軸応力状態の構成則を適用した RC チモシェンコ梁要素を提案し、曲げとせん断を受ける RC 梁への適用を試みたものである。本論文では更に、既往の実験結果を対象とした数値計算例を示し、従来の RC 梁の解析法との比較を通じて、本解析結果に対して若干の考察を加えた。

2. RC チモシェンコ梁の有限要素法への定式化

ここでは RC チモシェンコ梁の有限要素法への定式化の概要について記述する。定式化にあたって設定した基本仮定は次のとおりである。

- (1) 梁には曲げとせん断が作用するものとし、コンクリート断面にはチモシェンコ梁理論に基づく微小変形理論が適用される。
- (2) 梁を構成するコンクリートは等方性材料であり、また、曲げによる垂直応力 σ_c と横せん断応力 τ_{xz} との 2 軸応力下にあるものとする。
- (3) 梁に直線配筋されている補強材は軸方向力

*1 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 助手 博士 (工学) (正会員)

*2 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 教授 博士 (工学) (正会員)

*3 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 助教授 博士 (工学)

のみを負担する。

- (4) 補強材とコンクリートの間には、コンクリート断面からの相対変位で表示される材軸方向の付着すべりが生じ得る。

2.1 設定変位場

チモシェンコ梁理論は、平面保持の仮定に立脚した最も単純な梁理論に断面丈方向に渡って一様な横せん断変形の効果を付加したものである。本研究では、図-1に示すように、チモシェンコ梁理論で導入されるせん断による回転変位 β を曲げによる回転変位とは独立な変位場として設定する。即ち、本解析における変位場は、基準軸上の軸方向変位 u 、鉛直方向変位 w 、断面の平均せん断回転角 β 、および全 m 層の補強材のすべり変位 $s_1, \dots, s_i, \dots, s_m$ である。

2.2 歪（変位）増分と応力増分

図-1に、解析のために設定したRCチモシェンコ梁の断面の概要を示す。梁の断面は、任意の幅 b_i と丈 t_i を有する全 n 層のコンクリート層と直線配筋された全 m 層の補強材層で構成され、コンクリートと補強材の間には付着境界が存在する。本研究では、各コンクリート層の歪・応力状態を垂直成分のみならず横せん断成分をも用いて判定するが、梁理論においてはこの横せん断成分は先に設定した変位場で表示されるものではない。横せん断成分については、まず横せん断応力が計算の結果得られた垂直応力から材軸方向の応力の釣合いをを用いて算定され、次に横せん断歪がせん断剛性を介して表示されることになる³⁾。従って、先に設定した変位場を用いて直接表示できる歪（変位）増分は、曲げによる垂直成分と付着すべりに関するものである。

まず垂直成分については、チモシェンコ梁理論に準拠し、更に補強材には付着すべりの影響を考慮すると、任意のコンクリート層 i の垂直歪増分 $\Delta\epsilon_{c_i}$ 、および補強材層 i の垂直歪増分 $\Delta\epsilon_{s_i}$ はそれぞれ次のように表される。

$$\Delta\epsilon_{c_i} = \frac{d\Delta u}{dx} - z_i \left(\frac{d^2\Delta w}{dx^2} - \frac{d\Delta\beta}{dx} \right) \quad (1)$$

$$\Delta\epsilon_{s_i} = \frac{d\Delta u}{dx} - z_{s_i} \left(\frac{d^2\Delta w}{dx^2} - \frac{d\Delta\beta}{dx} \right) + \frac{d\Delta s_i}{dx} \quad (2)$$

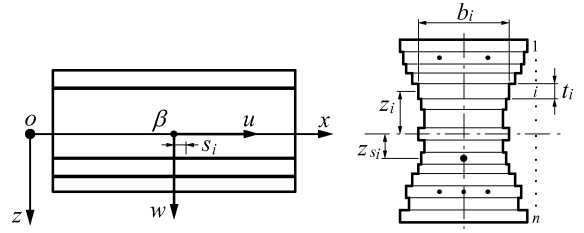


図-1 RCチモシェンコ梁の変位場と断面

但し、 z_i ：コンクリート層 i の x 軸からの鉛直距離、 z_{s_i} ：補強材層 i の x 軸からの鉛直距離

従って、コンクリート層 i の応力増分 $\Delta\sigma_{c_i}$ 、および補強材層 i の応力増分 $\Delta\sigma_{s_i}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$\Delta\sigma_{c_i} = E_{c_i} \Delta\epsilon_{c_i} \quad (3)$$

$$\Delta\sigma_{s_i} = E_{s_i} \Delta\epsilon_{s_i} \quad (4)$$

但し、 E_{c_i} ：コンクリート層 i の接線剛性、
 E_{s_i} ：補強材層 i の接線剛性

また、補強材層 i の付着界面に生じる付着応力増分 $\Delta\tau_{b_i}$ とすべり変位増分 Δs_i の関係は、次式で表示される。

$$\Delta\tau_{b_i} = K_{b_i} \Delta s_i \quad (5)$$

但し、 K_{b_i} ：補強材層 i の接線付着係数

2.3 全ポテンシャルエネルギー汎関数

変位法による有限要素法への定式化を行うにあたって、本研究では、全ポテンシャルエネルギーの原理を用いる。材料非線形領域にあるRCチモシェンコ梁の全ポテンシャルエネルギー汎関数 $\Delta\Pi$ は増分型で表示され、次のようになる。

$$\Delta\Pi = (\Delta U_{cn} + \Delta U_{st} + \Delta U_{bs} + \Delta_s U) - \Delta V \quad (6)$$

ここに、右辺の括弧内は内部エネルギー増分、 ΔV は外力による負荷ポテンシャルエネルギー増分である。

RCチモシェンコ梁の剛性に寄与する内部エネルギー増分のうち、 ΔU_{cn} 、 ΔU_{st} 、および ΔU_{bs} は、それぞれ曲げによるコンクリートと補強材の歪エネルギー増分、および付着すべりのポテンシャルエネルギー増分である。前節の歪（変位）増分と応力増分の関係から、これらは次のように表示される。

$$\Delta U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{c_i} \Delta \varepsilon_{c_i}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{s_i} E_{c_i} \Delta \varepsilon_{c_i}^2 dx \quad (7)$$

$$\Delta U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{s_i} E_{s_i} \Delta \varepsilon_{s_i}^2 dx \quad (8)$$

$$\Delta U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{b_i} K_{b_i} \Delta s_i^2 dx \quad (9)$$

但し、 L ：要素長、 A_{s_i} ：補強材層 i の断面積、 A_{b_i} ：補強材層 i の単位長さ当りの付着面積

また、残りの $\Delta_s U$ は梁の横せん断歪エネルギー増分である。先に記述したように、横せん断歪は変位場で表示できるものではないために、チモシェンコ梁理論ではこれは平均せん断回転角 β と関係付けられる。本研究では材料の非線形性によって時々刻々と変化する梁のせん断剛性を的確に算定し解析に取り入れるために、著者等が既往の弾性解析法³⁾において提示した横せん断歪エネルギーを以下のように増分表示して用いることにする。

$$\Delta_s U = \frac{1}{2} \int_0^L \xi \Delta \beta^2 dx \quad (10)$$

ここに、 ξ は次のような定数である。

$$\xi = \frac{\left(\sum_{i=1}^n b_i t_i \Delta \tau_{xz_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i}{G_{c_i}} \Delta \tau_{xz_i}^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{A_{s_i}}{G_{s_i}} - \frac{A_{s_i}}{G_{c_i}} \right) \Delta \tau_{xz_i}^2} \quad (11)$$

但し、 G_{c_i} ：コンクリート層 i の接線せん断

剛性、 G_{s_i} ：補強材層 i の接線せん断剛性
上式を用いる場合には、当該解析ステップにおける各層の横せん断応力増分 $\Delta \tau_{xz_i}$ の値が必要であるが、定数 ξ の値は応力の計算結果を左右するものではない。このため実際の計算では、各解析ステップにおいてまず ξ を適当な値に設定して一連の計算を行い、 $\Delta \tau_{xz_i}$ を評価した後に改めて本計算を実行することになる。

2.4 有限要素方程式

RC チモシェンコ梁の有限要素方程式は、標準的な変分手法に従うと、前節に示した増分型の全ポテンシャルエネルギー汎関数 $\Delta \Pi$ から誘導することができる。この手続を行うにあつ

て、本研究では、両端および中央に節点を設けた RC チモシェンコ梁要素を設定し、要素内での各変位増分 Δu , Δw , $\Delta \beta$, Δs_i (但し、 $i = 1 \sim m$) の分布を、それぞれ 3 次、5 次、3 次、3 次の関数で表現した。

3. RC チモシェンコ梁の材料モデル

本 RC チモシェンコ梁要素に設定した非線形材料モデルはコンクリートと補強材の材料特性、および付着応力-すべり関係である。

コンクリートについては、斜めせん断亀裂を表現し得るように、垂直応力 σ_c と横せん断応力 τ_{xz} による 2 軸応力状態の構成則を設定し、破壊の判定を行うことにする。先にも記述したように、判定のために必要なコンクリート層 i の横せん断応力 τ_{xz_i} は材軸方向の応力の釣合い関係を用いて次式で算定される。

$$\tau_{xz_i} = \frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ b_j t_j \frac{d\sigma_{c_j}}{dx} + A_{s_j} \left(\frac{d\sigma_{s_j}}{dx} - \frac{d\sigma_{c_j}}{dx} \right) \right\} + \frac{1}{2} t_i \frac{d\sigma_{c_i}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{A_{s_i}}{b_i} \left(\frac{d\sigma_{s_i}}{dx} - \frac{d\sigma_{c_i}}{dx} \right) \quad (12)$$

コンクリートを等方性材料として取り扱った本研究では、構成則として各コンクリート層ごとに唯一の応力-歪関係を設定した。まず、破壊に至るまでのコンクリートには、図-2 に示すように、以下に掲げる Kupfer 等⁴⁾の提案式を用いた。

$$\gamma_{co} = \frac{\tau_{co}}{2G_{co}} \frac{1}{1 - a(\tau_{co}/\sigma_{cc})^m} \quad (13)$$

但し、 γ_{co} ：八面体せん断歪、 τ_{co} ：八面体せん断応力、 G_{co} ：初期せん断剛性、 σ_{cc} ：1 軸圧縮強度、 a , m ：定数
ここに、八面体せん断応力 τ_{co} は、梁の場合、次式を用いて算定される。

$$\tau_{co} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_{xz}^2} \quad (14)$$

また、この時のコンクリートの接線剛性 E_c は、接線せん断剛性 G_c および接線体積弾性係数 K_c との関係から得られ、次のようになる。

$$G_c = \frac{G_{co} \{1 - a(\tau_{co}/\sigma_{cc})^m\}^2}{1 + a(m-1)(\tau_{co}/\sigma_{cc})^m} \quad (15)$$

$$K_c = \frac{K_{co} G_c}{G_{co} e^{-(c\gamma_{co})^p} \{1 - p(c\gamma_{co})^p\}} \quad (16)$$

$$E_c = \frac{9K_c G_c}{3K_c + G_c} \quad (17)$$

但し、 K_{co} ：初期体積弾性係数、 c, p ：定数
コンクリートの破壊の判定については、主応力表示された Kupfer 等⁴⁾の破壊条件を用いた。梁理論におけるコンクリートの主応力 σ_{c1}, σ_{c2} は、それぞれ次のように表示される。

$$\sigma_{c1} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_{xz}^2} \right\} \quad (18)$$

$$\sigma_{c2} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_c - \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_{xz}^2} \right\} \quad (19)$$

従って、上式から明らかなように、本解析ではコンクリートの破壊条件として、以下に示す引張－圧縮領域のみを取り扱うことになる。

$$\sigma_{c1} = \left(1 - 0.8 \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{cc}} \right) \sigma_{ct} \quad (20)$$

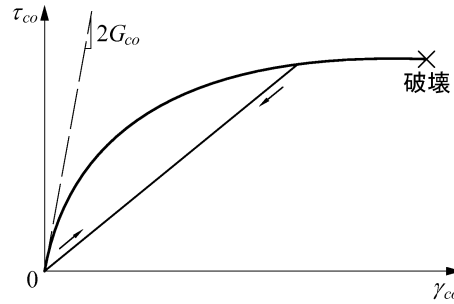
但し、 σ_{ct} ：1 軸引張強度

破壊後のコンクリートには簡単のため、亀裂の方向に応じた異方性は考慮せず、破壊時の垂直成分のみに依存した一軸状態の応力－歪関係を設定した。図－3、図－4 にそれぞれ圧縮側および引張側の応力－歪関係を示す。これらはいずれも破壊エネルギーを導入した歪軟化経路である。また、亀裂面におけるせん断伝達特性は、破壊後のコンクリートのせん断剛性 G_{cr} を簡易的に初期せん断剛性 G_{co} の定数倍に低減させて表現した。

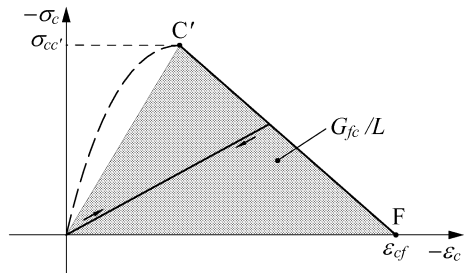
尚、本解析で設定した補強材の材料特性および付着応力－すべり関係は、著者等の既報告⁵⁾と同様である。

4. 数値計算例

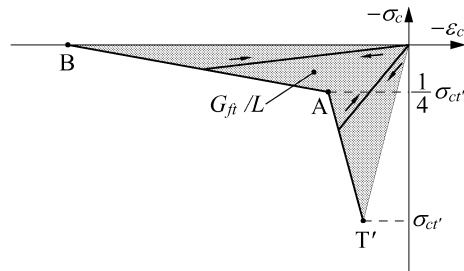
既往の実験結果に対する本解析法による数値計算例を掲げ、若干の考察を行うことにする。対象とした試験体は池田等⁶⁾の2体のRC単純支持梁である。図－5に、各RC梁試験体（試験体名：RC-1、RC-3）の概要と材料特性を示す。矩形断面を有するこの2体の試験体は、それぞれスパンが梁丈の5.6倍および3.6倍と、横せん断変形の影響を無視し得ない比較的短スパンの部材である。実験時におけるコンクリートの圧縮強度は 25.9 N/mm^2 、引張強度は 2.64 N/mm^2



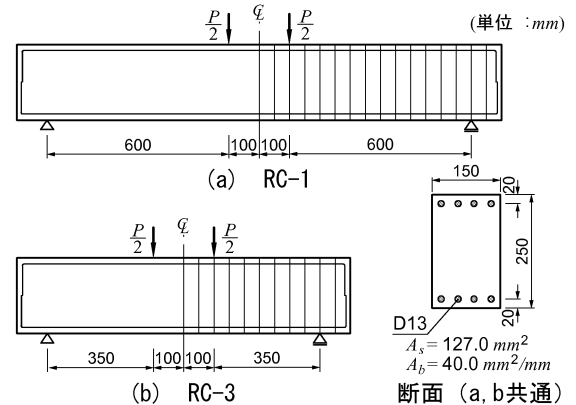
図－2 コンクリートの八面体せん断応力－歪関係（破壊以前）



図－3 破壊後のコンクリートの圧縮軟化経路



図－4 破壊後のコンクリートの引張軟化経路



・コンクリート
 $\sigma_{cc} = 25.9 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_{ct} = 2.64 \text{ N/mm}^2$
 $E_{co} = 32.5 \text{ kN/mm}^2$ $G_{co} = 13.6 \text{ kN/mm}^2$ $K_{co} = 17.6 \text{ kN/mm}^2$
 $a = 3.17$ $m = 2.22$ $c = 442.6$ $p = 2.06$
 ・鉄筋 (8-D13)
 $\sigma_{sy} = 347.0 \text{ N/mm}^2$ $E_s = 195.1 \text{ kN/mm}^2$

図－5 池田等のRC梁の概要と材料特性

であり、鉄筋の降伏強度は 347.0 N/mm^2 、弾性係数は 195.1 kN/mm^2 である。解析を行うために必要なコンクリートの材料特性値 G_{co} 、 K_{co} と定数 a, m, c, p については、コンクリートの圧縮強度に合わせて、Kupfer 等によって示された

値を線形補間して設定した。また付着特性には、CEB-FIP MODEL CODE 1990⁷⁾に準拠した値を仮定した。

解析は、対称性を考慮して試験体の半スパンまでを対象とし、試験体 RC-1 は 16 要素、試験体 RC-3 は 11 要素で表現した。断面はいずれの試験体においても 26 層分割とした。解析で採用した増分手法は、荷重増分法である。ここではまた、本解析結果との比較・検証を行うことを目的に、本解析のほか、(1) Case-1: コンクリートの 1 軸応力-歪関係⁵⁾のみを用いた RC チモシェンコ梁の材料非線形解析、(2) Case-2: 横せん断変形・横せん断応力の影響を考慮しない通常の微小変形理論による材料非線形解析（必然的に 1 軸応力-歪関係⁵⁾を採用している）、の 2 種の別解析も行った。別解析における要素・断面分割数は本解析と同様である。

まず、亀裂が発生したコンクリートに設定されたせん断剛性 G_{cr} の値が本解析結果に及ぼす影響について見てみることにする。図-6 は、 G_{cr} を初期せん断剛性 G_{co} の 0.1, 0.01, 0.001 倍と変化した 3 種類の本解析値を、試験体 RC-1 の荷重-変位曲線で示したものである。図から明らかなように、 G_{cr} の値は初亀裂が発生した後の RC 梁の剛性評価に深く関係しており、0.01 倍とした解析値が最も良く実験値と対応していることが分かる。図示してはいないが、試験体 RC-3 においても同様の結果が得られた。このことから以降の解析結果の検証は、 $G_{cr} = 0.01 G_{co}$ とした解析結果について行うことにする。

図-7 および図-8 は、それぞれ試験体 RC-1 および RC-3 のスパン中央点における荷重-変位曲線を、実験値と本解析値、および 2 種の別解析値で比較したものである。図の結果より、これらの解析値は、いずれも初期剛性と最大耐力については、実験値と比較的良く対応していることが分かる。しかしながら、初亀裂が発生した後の、これらの試験体の剛性が低下した領域に関しては、個々に幾分異なった解析結果が示されており、特に横せん断変形の影響を考慮し

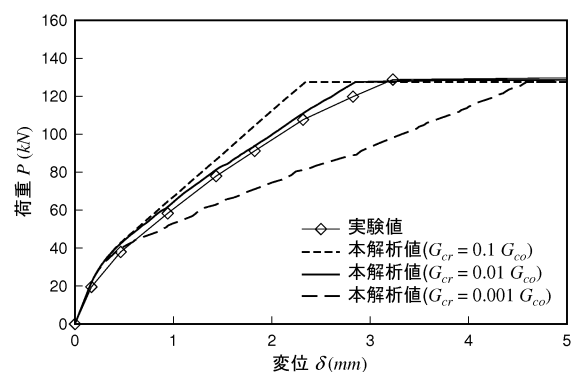


図-6 荷重-変位曲線に及ぼす亀裂発生後のせん断剛性の影響 (RC-1)

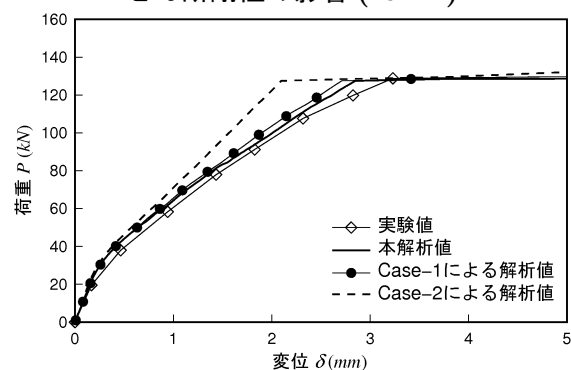


図-7 荷重-変位曲線の比較 (RC-1)

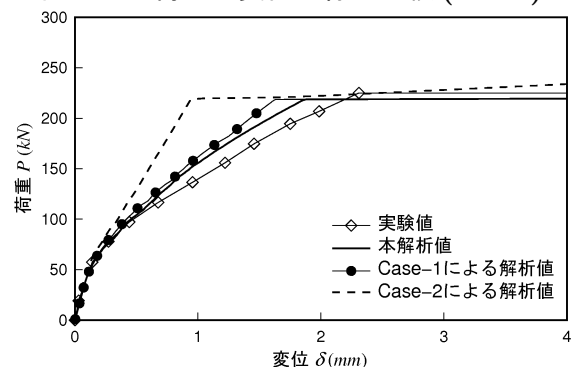
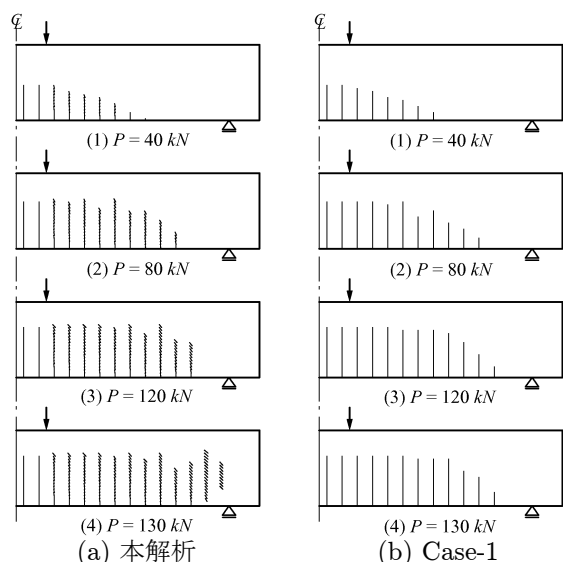
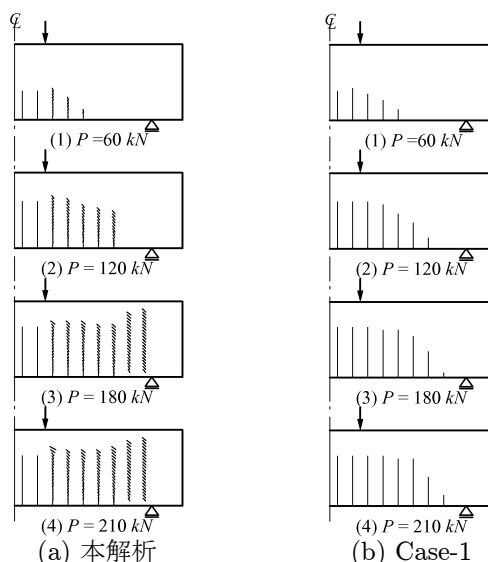


図-8 荷重-変位曲線の比較 (RC-3)

ていない Case-2 の解析値は実験値と全く対応していない。一方、チモシェンコ梁要素による本解析と Case-1 の解析では、剛性低下の度合いともに Case-2 のものよりも大きく、実験値により近づいた荷重-変位曲線が得られている。また、この両解析曲線を見比べてみると明らかなように、本解析値はこれらの試験体の初期剛性から最大耐力に至るまでの全体的な変形挙動を、この 3 種の解析値の中では最も良好に追跡し得ているのに対し、Case-1 の方は、特によりスパンが短い試験体 RC-3 において実験値との誤差が顕著に現れており、この種の部材の解析には、2



図－9 解析における亀裂の進展状況 (RC-1)



図－10 解析における亀裂の進展状況 (RC-3)

軸応力状態のコンクリートの構成則を用いることが必要であることが分かる。

図－9 および図－10 は、それぞれ本解析における各試験体のコンクリートの亀裂の進展状況を、Case-1 の解析値と対比して示したものである。いずれの試験体においても、本解析では、梁のせん断スパン内において、コンクリートの亀裂が広範にわたって発生し最大耐力に至っているが、Case-1 の解析値では、梁に作用する曲げモーメント曲線の形状に対応した亀裂の分布性状を示しており、ここに本解析で垂直応力と横せん断応力との 2 軸応力下における亀裂の発生を考慮した効果を明確に読み取ることができる。

5. まとめ

本論文では、コンクリートに垂直応力と横せん断応力による 2 軸応力状態の構成則を適用した RC チモシェンコ梁要素を提案し、斜めせん断亀裂の発生を取り扱うことが可能な RC 梁の材料非線形解析法について論じた。また、既往の実験結果を対象とした数値計算例を掲げ、次のような知見を得た。

(1) 本解析法では、亀裂発生後のコンクリートのせん断剛性を初期せん断剛性の 0.01 倍程度に設定すると、比較的スパンー梁丈比が小さく横せん断変形の影響を無視し得ない RC 単純支持

梁試験体の荷重－変形応答を、初期剛性から初亀裂後の剛性低下領域を経て最大耐力に至るまで、比較的良好に表現することが可能である。

(2) 垂直応力と横せん断応力の 2 軸応力状態における亀裂の発生を考慮した本解析法では、コンクリートの 1 軸の構成則を用いた解析法と比較して、RC 梁のせん断スパン内において亀裂が広範にわたって発生する。

参考文献

- 1) 稲田祐二, 川端康洋, 近藤一夫, 玉井宏章, 角徹三: ハイブリット型応力法による鉄筋コンクリート造骨組の弾塑性崩壊解析, 日本建築学会構造系論文集, No.508, pp.55-62, 1998.6
- 2) 丸尾宗朋, 田辺忠顕: マイクロプレーンモデルを用いた RC ティモシェンコ梁の解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.21, No.3, pp.421-426, 1999.6
- 3) 越川武晃, 上田正生, 内山武司, 和田俊良: 補強材の付着すべりを考慮した任意断面を有する RC チモシェンコ梁の弾性解析, 日本建築学会構造系論文集, No.559, pp.107-112, 2002.9
- 4) Kupfer, H. B. and Gerstle, K. H.: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ASCE, Vol.99, No.EM4, pp.853-866, Aug. 1973
- 5) 越川武晃, 齊藤隆典, 上田正生, 菊地優: 緊張鋼材の付着すべりを考慮した圧着型 PCaPC 梁－柱部材の履歴挙動解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, No.2, pp.37-42, 2004.7
- 6) 池田尚治, 南雲広幸: RC および PC 構造物への有限要素法の合理的適用方法に関する研究, 土木学会論文集, No.414/V-12, pp.137-143, 1990.2
- 7) Comité Euro-International du Béton: CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, CEB, 1990