

論文 曲げ変形のみを考慮する RC 柱梁部材のマクロ FEM モデルの開発

陳 少華^{*1}・壁谷澤 寿海^{*2}

要旨：鉄筋コンクリート柱，梁部材の解析モデルは，復元力特性を用いる材端バネモデル，柔度分布を仮定するファイバーモデル，FEM 要素モデルなどがある。軸力と 2 方向曲げモーメントの相互作用や繰り返し曲げ載荷による軸方向の伸びを再現するため，本研究では，柱梁部材の断面をファイバーに分割して評価し，曲げ変形のみを考慮する変位分布関数を仮定し，FEM 手法を用いるフレーム要素を開発した。

キーワード：柱，梁，FEM，フレーム要素

1. はじめに

本研究では，軸力と 2 方向曲げモーメントの相互作用や繰り返し曲げ載荷による軸方向の伸びを再現するため，FEM 手法を用いるフレーム要素を開発する。

鉄筋コンクリート建物の柱，梁部材の解析モデルは，復元力特性を用いる材端バネモデル，MS モデル，部材軸方向に沿う柔度分布を仮定したファイバーモデルや FEM 要素を用いた有限要素解析手法などがある。復元力特性に基づくモデルは，崩壊に関する評価が現時点で確立されていないため，部材崩壊までの解析は不可能である。ファイバーモデルは，部材両端のひずみ - 応力度関係が独立で評価されるため，構造解析で解除できない部材内部不釣り合い力が生じることがある。FEM モデルは，部材を小さいメッシュに分割することによって行われる。大型構造の解析における解析時間や，メッシュ分割及び入力データの準備に掛かる手間や，解析結果の分かりやすかつ実用的な表現の困難などの問題がある。

一般的に，鉄筋コンクリート建物の柱梁部材の変形では，せん断変形成分が小さく，曲げ変形成分が主要である。本研究では，コンクリートと鉄筋の一軸応力度 - ひずみ関係を用いて，柱梁部材のせん断変形を無視し，曲げ変形のみ

を考慮するマクロ FEM フレーム要素を提案し，部材崩壊まで解析可能な部材モデルを開発する。

2. 柱梁部材のマクロ FEM モデル

2.1 FEM フレーム要素

(1) 変形関数

当研究では，フレーム要素として端部節点のみを有する 2 節点要素を用いる。要素の局所座標は，図 1 に示し，形状関数は N_1, N_2 とする。部材軸方向に関する捩れ変形を無視し，各節点の自由度は X 軸の変位 u ，Y 軸の変位 v ，Z 軸の変位 w ，X 軸に関する回転 θ_x ，Y 軸に関する回転 θ_y の 5 個とする。

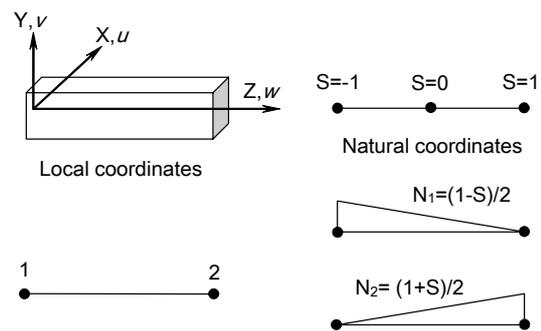


図 1 フレーム要素の座標系

部材の長さを l とし，部材軸方向の座標は，正規化した座標 S を用いて以下の式(1)で表され

*1 独立行政法人 防災科学技術研究所 特別研究員 工博 (正会員)

*2 東京大学地震研究所 教授 工博 (正会員)

る。

$$z = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = (1-S)/2 \quad (1)$$

$$N_2 = (1+S)/2$$

曲げ変形のみを考慮する場合，部材の任意位置の断面回転角は，撓みの Z 軸に対する微分である。撓みの分布を軸座標の 3 次，2 次，1 次と常数項で表せると仮定し，部材の任意位置の撓みは，部材両端の節点変位を用いて次の式(2)で表される。

$$d_x = [N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$d_y = [N_6 \quad N_7 \quad -N_8 \quad -N_9] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix}$$

ここに，変形関数 N_6, N_7, N_8, N_9 は，次の式(3)に示す。

$$N_6 = \frac{1}{4}(1-S)^2(2+S),$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1+S)^2(2-S),$$

$$N_8 = \frac{l}{8}(1-S)^2(1+S),$$

$$N_9 = -\frac{l}{8}(1-S)(1+S)^2 \quad (3)$$

また，その形状は，図 2 に示す。

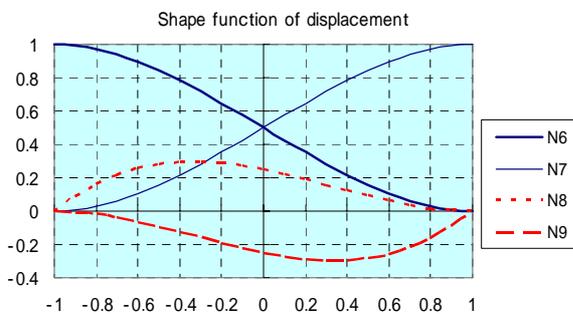


図 2 撓みの形状関数

任意位置の回転角と軸変位は，次の式(4)でま

とめられる。

$$w = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_x = [N_3 \quad -N_3 \quad N_4 \quad N_5] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\theta_y = [-N_3 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

変形関数 N_3, N_4, N_5 は，式(5)で表される。

$$N_3 = \frac{3}{2l}(1-S^2),$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1-S)(1+3S),$$

$$N_5 = -\frac{1}{4}(1+S)(1-3S) \quad (5)$$

また，その形状は，図 3 に示す。

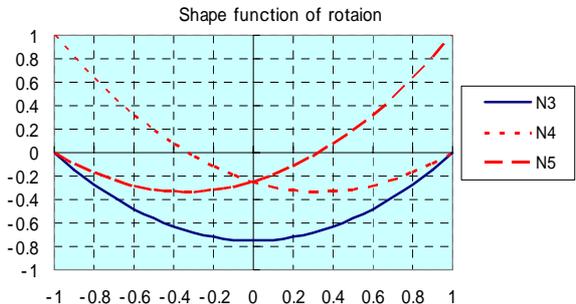


図 3 回転角の形状関数

(2) 部材剛性マトリックスの生成

前節までは，要素両端の節点変位 $\{d\}$ を用いて，部材軸方向の任意位置の軸変位，回転角を表すことができた。さらに，軸変位，回転角を軸座標に対する微分を求めることによって，部材軸方向の任意位置のひずみ $\{\varepsilon\}$ （軸ひずみと曲率）を求めることができる（式(6)）。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0 \quad \phi_x \quad \phi_y\}^T$$

$$\{d\} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2}\}^T \quad (6)$$

マトリックス[B]は、ひずみマトリックスと呼び、次の式(7)に示す。

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 \\ -\frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

なお、変位関数 N_i ($i=1,2,3,4,5$) の全体 Z 座標に対する微分は、式(1)の関係を用いて、正規化した局所座標 s に対する微分で表される(式(8))。

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial s}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{2}{l} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial s} \quad (8)$$

断面剛性マトリックス[D]を用いて、任意位置における断面応力度 $\{\Delta\sigma\}$ (軸力と曲げモーメント) 増分とひずみ $\{\Delta\varepsilon\}$ (軸ひずみと曲率) 増分の関係は、次の式(9)に表される。断面剛性マトリックス[D]は、ガウス積分点で評価される。

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} &= [D]\{\Delta\varepsilon\} \\ \{\Delta\sigma\} &= \{\Delta N \quad \Delta M_x \quad \Delta M_y\}^T \end{aligned} \quad (9)$$

仮想仕事原理により、材端の力増分 $\{\Delta f\}$ と変位増分 $\{\Delta d\}$ の関係は、次の式(10)となる。

$$\begin{aligned} \{\Delta f\} &= \int_0^l [B]^T [D] [B] dz \{\Delta d\} = [K] \{\Delta d\} \\ [K] &= \int_0^l [B]^T [D] [B] dz = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] ds \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、マトリックス[K]は、部材の剛性マトリックスと呼ぶ。材端力ベクトル $\{f\}$ は、以下の式(11)に示す。

$$\{f\} = \{Q_{x1} \quad Q_{y1} \quad N_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad Q_{x2} \quad Q_{y2} \quad N_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2}\}^T \quad (11)$$

(3) 断面剛性マトリックス[D]

鉄筋コンクリート柱梁の断面は、せん断補強筋によって被りコンクリートとコアコンクリートに分かれ、主筋の付着作用やせん断補強筋の拘束効果のため、それぞれの力学特性が異なる。本研究では、柱梁断面のコンクリートは被りコンクリート(鉄筋コンクリート)とコアコンクリート(無筋コンクリート)に分類してセル分割し、主鉄筋は1本ずつ応力度-ひずみ関係を評価し、断面の剛性マトリックス[D]を生

成する。なお、断面のセル分割は、被りコンクリートは被り厚さの2倍(鉄筋を中心とする)とし、図4のように行う。

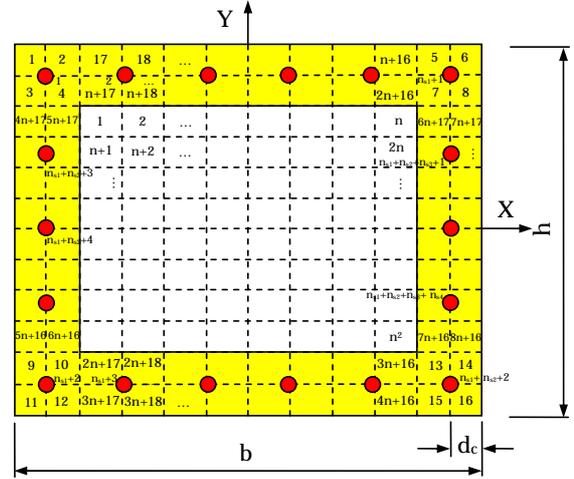


図4 コンクリート断面のセル分割

各セルの断面に対する貢献は、セルの面積 (A_i)、中心の座標 (x_i, y_i)、ヤング係数 (E_i)、ひずみ (ε_i)、応力度 (σ_i) を用いて評価する。各セルの中心のひずみ増分は、断面のひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon\}$ より算出される(式(12))。

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_0 + \Delta\phi_x \cdot y_i - \Delta\phi_y \cdot x_i \quad (12)$$

断面の剛性マトリックス[D]は、各セルのヤング係数、面積及び座標を用いて、以下の式(13)で求められる。

$$[D] = \begin{bmatrix} \sum E_i A_i & \sum E_i y_i A_i & -\sum E_i x_i A_i \\ & \sum E_i y_i^2 A_i & -\sum E_i x_i y_i A_i \\ sym & & \sum E_i x_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.2 材料の力学特性

鉄筋コンクリート柱梁の断面を構成する被りコンクリート、コアコンクリートと鉄筋の応力度-ひずみ関係は、一軸の平均的な応力度-ひずみ関係を用いる。

(1) コンクリート

コンクリートの応力度-ひずみ関係は、図5に示すものとする^{1),2)}。主筋の付着作用のため、

クス $[K_0]$ と剛域を除いた部材両端の変位 $\{d\}$ 、節点力 $\{f\}$ 及び剛性マトリックス $[K]$ の関係は、変換マトリックス $[TR]$ を用いて、式(14)のように表される。

3. 解析例

3.1 片持ち梁の実験概要

本研究で提案する柱梁のマクロ FEM モデル検証に用いる片持ち梁の実験概要図を図 8 に示す。当実験⁴⁾では、軸力を加えず、部材端部の静的繰り返し载荷により、部材が曲げ破壊した。梁の断面は、幅 200×高さ 300mm であり、シアスパンは 1150mm である。軸変形は、部材端部 20cm の軸方向伸びを計った。

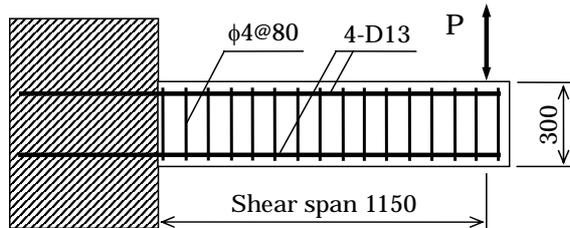


図 8 片もち梁の実験概要図（単位：mm）

鉄筋及びコンクリートの材料特性は、表 1 に示す。なお、実験は材令 55～72 日の間に行われた。解析では、材令 54 日の数値を採用している。

表 1 材料特性

鉄筋			
鉄筋種類	降伏点 [MPa]	引張強度 [MPa]	ヤング係数 [MPa]
D13	361	499	186×10^3
φ4	478	509	208×10^3
コンクリート			
材令 [日]	圧縮強度 [MPa]	引張強度 [MPa]	ヤング係数 [MPa]
28	26.4	2.18	30.4×10^3
54	27.4	2.49	29.1×10^3
74	30.4	2.64	27.2×10^3

変位制御による繰り返し载荷は、各载荷レベルで正負 3 回を繰り返し、载荷の履歴を図 9 に示す。変形角 3% 以降の载荷実験では、変位が偏っていた。

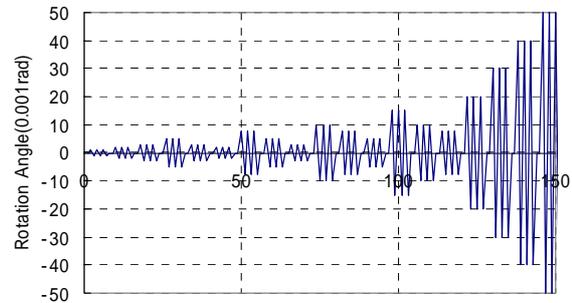


図 9 繰り返し载荷履歴

3.2 解析モデル

解析モデルは、梁試験体を 3 つのフレーム要素に分割する。固定端部の鉄筋の抜き出し効果を考慮するため、固定部より 5 cm までを部材長とする。要素の分割について、部材端部の要素の長さは部材断面高さを目安とし、部材中央の要素の長さは長めに取って良い。当解析では、部材端部の軸方向伸びについて実験結果と比較するため、部材端部の要素の長さを 25cm とした（図 10）。なお、ガウス積分点は 3 とした。

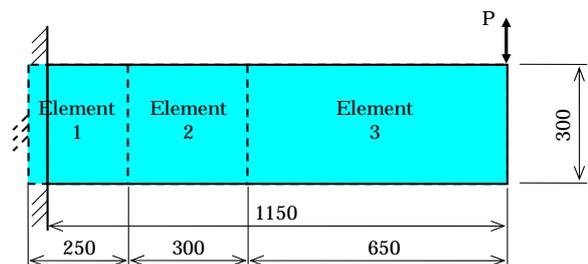


図 10 梁部材解析の要素分割

3.3 解析結果

荷重 変形関係の実験結果と解析結果は、図 11、図 12 に示す。降伏強度が良い精度で再現されていることが分かる。ただし、変形角 3% 以降の耐力低下が再現できなかった。

図 13 には、载荷点の変位と部材端部の軸方

向伸びひずみの関係を示している。実験結果(実線)が変形角 15/1000 までしか取れていなかったため、この変形範囲以内の解析結果(点線)は、概ね実験結果を再現していることが分かる。

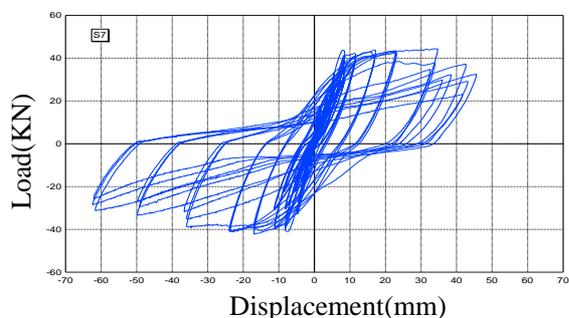


図 1.1 荷重 変形関係の実験結果

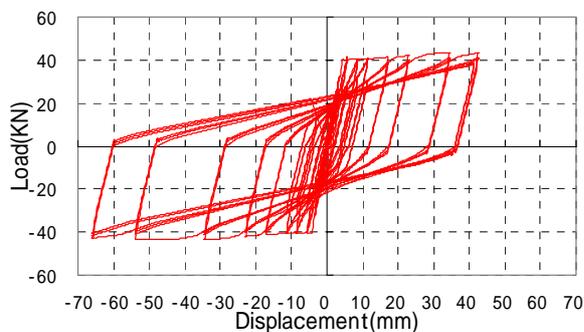


図 1.2 荷重 変形関係の解析結果

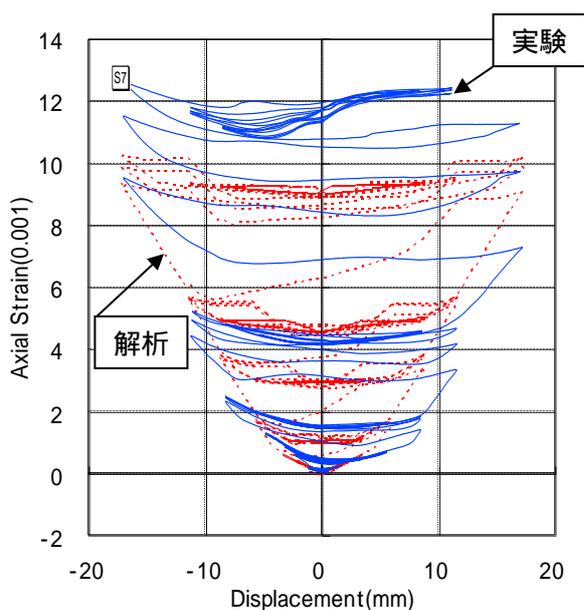


図 1.3 軸方向伸びひずみと材端変位の関係

4. まとめ

本研究を次のようにまとめられる。

- (1) FEM手法を用いた柱梁部材のマクロFEM解析モデルを提案した。
- (2) 片持ち梁による提案モデルの実験検証を行った。
- (3) 耐力や繰返し曲げ変形による軸方向の伸び現象などを一定の精度で再現することができた。
- (4) 大変形角時の耐力低下が再現できず、今後の課題とする。
- (5) せん断弾性係数 G を用いて、せん断変形の評価も今後の課題とする。

本研究は、文部科学省が推進している「大都市大震災低減化特別プロジェクト」の一環として行ったものである。

参考文献

- 1) Kent, D. C., and Park, R. : Flexural Member with Confined Concrete, Journal, Structure Division, ASCE, Vol.97, ST-7, pp.1969-1990, 1971
- 2) 岡村 甫, 前川宏一: 鉄筋コンクリートの非線形解析と構成則, 技報堂出版, 1991年。
- 3) 陳少華: 鉄筋コンクリート建物の構造解析における耐震壁のモデル化に関する研究, 東京大学博士学位論文, 2000年
- 4) 金子 洋, 金子貴司, 小谷俊介, 塩原 等: せん断余裕度と載荷速度が鉄筋コンクリート部材の靱性に及ぼす影響(その一 実験概要および実験結果), 日本建築大会講演梗概集, 構造, C-2, pp.301-302, 2002.