

論文 圧力依存性を考慮したフレッシュコンクリートの流動解析に関する研究

山田 義智*¹・富山 潤*²・伊良波 繁雄*³

要旨:本研究は、フレッシュコンクリートの流動性状が、圧力依存性を有する場合の粘塑性構成式を超過応力理論を用いて導いた。ここでは、圧力依存性を考慮するためにDrucker-Pragerの降伏条件を用いている。関連流れ則と非関連流れ則を適用して導いた構成式を理論的に考察したところ、非関連流れ則の方がフレッシュコンクリートの流動特性を表すのに適切と判断した。得られた粘塑性構成式を運動方程式に適用し、粘塑性有限要素法を用いてスランプ試験を対象に流動解析を行ったところ、圧力依存性の効果が確認された。

キーワード: 圧力依存性, 構成式, 超過応力理論, 有限要素法, スランプ試験

1. はじめに

フレッシュコンクリートの流動特性は非常に複雑である。例えば、レオロジー試験においてせん断ひずみ速度が大きくなると、軟化(あるいは硬化)性状を呈してビンガムモデルから乖離する場合があったり、流動曲線の往路と復路で流動特性が変化する履歴現象が生じる。これら現象は、フレッシュコンクリート内部の粒子間の構造変化が進む事が一因と考えられる。

筆者らは、このように複雑なフレッシュコンクリートの流動特性を表す粘塑性構成式を超過応力理論を用いて導き文献1)に示した。しかし、この文献においては、構成式の導出に際してMisesの降伏条件を用いており、降伏条件が圧力依存を受けないモデルであった。

コンクリートは細骨材や粗骨材など多くの固体粒子を含んでおり、これらの相互干渉により摩擦が生じ、フレッシュコンクリートの流動特性に影響を与えられ、と考えられる。ところで、固体間の摩擦力が圧力で変化することはクーロンの摩擦理論から推測される。従って、フレッシュコンクリート中の骨材間の摩擦力も圧力により変化し、その流動特性も圧力の影響を受けられ、実際に多くの実験においても圧

力依存性のあることが報告されている²⁾。圧力依存性を降伏条件に考慮した先駆的な解析的検討が文献3)で行われているが、文献3)では流れ則を含む粘塑性構成式の十分な検討や、材料非線形性を考慮した流動解析は行われていない。

そこで、本研究ではDrucker-Pragerの降伏条件を用いて、関連流れ則および非関連流れ則を適用し、降伏条件や塑性粘度が圧力依存を受ける粘塑性構成式を超過応力理論より導いた。そして、関連流れ則と非関連流れ則の両者による粘塑性構成式を理論的に考察・検討し、実際のフレッシュコンクリートの流動状態に適合すると考えられる方を採用した。

さらに、本研究では採用した粘塑性構成式を運動方程式に適用し、材料非線形性を考慮した粘塑性有限要素法を用いた数値解析によりスランプ試験を対象に流動解析を行った。そして、解析で得られた知見を基に、フレッシュコンクリート流動特性の圧力依存性について考察した。

2. 粘塑性構成式について

2.1 Perzyna 型の超過応力理論

Perzyna⁴⁾は、粘塑性ポテンシャル Q による流れ則が成り立ち、粘塑性ひずみ速度が降伏値

*1 琉球大学 工学部環境建設工学科助教授 博士(工学) (正会員)

*2 琉球大学 工学部環境建設工学科助手 博士(工学) (正会員)

*3 琉球大学 工学部環境建設工学科教授 博士(工学) (正会員)

を越えた応力, 即ち超過応力に比例するとして, 次式を提案した。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} \quad (1)$$

ここで, γ は実験定数, F は降伏関数, ϕ は超過応力を表す F の汎関数である。 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は粘塑性ひずみ速度, τ_{ij} は応力を表し, $\langle \cdot \rangle$ はMacauley括弧で, 次式のように流動状態の変化を表す。

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0: \text{不動状態}) \\ \phi(F) & (F > 0: \text{流動状態}) \end{cases} \quad (2)$$

2.2 降伏関数

本研究では, 降伏関数として以下に示す圧力依存性を有するDrucker-Pragerの降伏関数を採用する³⁾。

$$F = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y \quad (3)$$

ここで, α は正の定数, $J_1 = \tau_{ii}$, $J_2 = \tau'_{ij}\tau'_{ij}/2$ である。なお, τ'_{ij} は偏差応力を表す。

式(3)において $\alpha = 0$ の場合, $F = \sqrt{J_2} - \tau_y$ となり, Mises の降伏関数となる。

2.3 関連流れ則による粘塑性構成式

王・井上⁹⁾らは, 粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ が超過応力そのものに依存するものとし, 降伏値が無視できるニュートン流体等にもPerzyna型の粘塑性構成式の適用を可能にした。ここでは, 王・井上らの考え方を採用し, 流動時($F > 0$)に $\phi(F) = F$ とした。また, 関連流れ則を適用し, 粘塑性ポテンシャル Q にDrucker-Pragerの降伏関数(式(3))を用いて, 式(1)より流動時の粘塑性ひずみ速度を以下の様に求めた。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma (\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y) \frac{\partial (\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y)}{\partial \tau_{ij}} \quad (4)$$

式(4)右辺の偏微分項は式(5)の様に展開される。式(5)の δ_{ij} はクロネッカーデルタである。

$$\frac{\partial (\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y)}{\partial \tau_{ij}} = \alpha \delta_{ij} + \frac{\tau'_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \quad (5)$$

式(5)にて式(4)を書き直せば次式となる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma (\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y) \left(\alpha \delta_{ij} + \frac{\tau'_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \quad (6)$$

式(6)を応力 τ'_{ij} -粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ の関係に書き直すと式(7)となる。この式が, フレッシュコンクリートの流動時の粘塑性構成式である。

$$\tau_{ij} = \frac{1}{\gamma} \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_2} - \tau_y} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} - \left(2\alpha\sqrt{J_2} - \frac{\tau_{ii}}{3} \right) \delta_{ij} \quad (7)$$

ここで, 実験定数 γ の逆数 $1/\gamma$ は塑性粘度 η に相当する。

ところで, 分散系流体が変形する時, その体積を増加させる場合があり, ダイラタンシーと称される。この現象は, 流動により分散系内の粒子の配列が変化, もしくは乱されることにより体積が増加するとして説明される⁶⁾(**図-1(a)-(b)**参照)。しかし, フレッシュコンクリートの流動の様に流動時間が長く, 流動が進行する場合(**図-1(b)-(c)**参照)は, 流動開始直後の僅かな時間の間に体積増加の起こる可能性があるが, その後の流動中に体積増加が永続する事は考えにくく, その増加量も大きくないと推察される。

粘塑性ポテンシャル Q にDrucker-Pragerの降伏関数を用い, 関連流れ則を適用した粘塑性構成式(式(7)もしくは式(6))においては, 体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ii}^{vp}$ が次の様に導かれる。

$$\dot{\epsilon}_{ii}^{vp} = 3\alpha (\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y) \quad (8)$$

式(8)において, α および流動時の超過応力 $(\alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \tau_y)$ はともに正值であるため, 体積ひずみ速度は $\dot{\epsilon}_{ii}^{vp} > 0$ で膨張の方向にある。従って, 粘塑性体が流動状態にあれば, その体積は永続的に膨張する事になる。しかし, 前述の様に流動中に体積が膨張し続けることは考えにくく, そのような実験報告も筆者の知る限りない。

この体積膨張の原因は, 粘塑性ポテンシャル

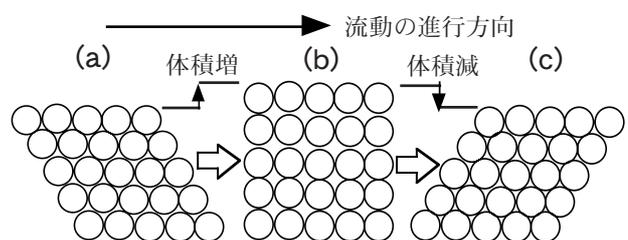


図-1 分散系の体積変化概念図

QにDrucker-Pragerの降伏関数を用いたことにある。そこで、次節では圧力依存性を考慮し、かつ、体積変化が生じないように、 $\phi(F)$ にはDrucker-Pragerの降伏条件を用い、粘塑性ポテンシャルQにはMisesの降伏関数を適用する非関連流れ則による構成式の導出過程を示す。

2.4 非関連流れ則による粘塑性構成式

Drucker-Pragerの降伏条件を用い、粘塑性ポテンシャルQにはMisesの降伏関数を採用すれば、流動時の粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は式(1)より次の様に導ける。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{f}{\sqrt{J_2'}} \right) \tau'_{ij} \quad (9)$$

ここで、 $f(= \tau_y - \alpha J_1)$ は圧力により変動する降伏値を表す。

いま、式(9)に式(10)で表す汎関数 g を導入すると式(11)となる。ここで、 $\mu = 1/\gamma g$ である。

$$g = 1 - \frac{f}{\sqrt{J_2'}} \quad (10)$$

$$\tau'_{ij} = (2/\gamma g) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (11)$$

粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ の第2次不変量が $J_2'^\epsilon = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} / 2$ で表せること、および偏差応力の第2次不変量が $J_2' = \tau'_{ij} \tau'_{ij} / 2$ であることより、式(11)から次式の関係が導ける。

$$J_2' = 4\mu^2 J_2'^\epsilon \quad (12)$$

上記の式(12)において両辺の平方根をとると、 $\sqrt{J_2'} = \sqrt{4\mu^2 J_2'^\epsilon} = \mu\sqrt{\Pi}$ となる。ここで、 $\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ である。これを、式(10)に代入し、関数 g の逆数を求めると次式となる。塑性粘度 $\eta = 1/\gamma$ である。

$$\frac{1}{g} = 1 + \frac{f}{g\sqrt{J_2'}} = 1 + \frac{f}{g\mu\sqrt{\Pi}} = 1 + \frac{f}{\eta\sqrt{\Pi}} \quad (13)$$

式(13)より、式(11)は以下の様に整理される。

$$\tau'_{ij} = (2/\gamma g) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = 2 \left(\eta + \frac{f}{\sqrt{\Pi}} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (14)$$

上式において、塑性粘度 η を定数ではなくて、圧力依存性があるものとして $\eta_{J_1} = \eta - \beta J_1$ とすると構成式は次式となる。

$$\tau'_{ij} = 2 \left(\eta_{J_1} + \frac{f}{\sqrt{\Pi}} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (15)$$

3. 運動方程式と粘塑性有限要素法の概要

本研究では、コンシステンシー試験として代表的なスランプ試験を解析の対象とした。スランプ試験の流動状況は軸対象問題で表せる。そこで、ここではフレッシュコンクリートの運動方程式を軸対称問題で扱い、その解法に粘塑性有限要素法を用いた。

本研究における、粘塑性有限要素法の特徴は剛塑性有限要素法における $[D]_g$ マトリックスに塑性粘度の影響を考慮した $[D]_{vp}$ マトリックスを用いることであり、解法そのものは剛塑性有限要素法⁷⁾と変わらない。なお、 $[D]_{vp}$ は応力-粘塑性ひずみ速度関係を表すマトリックスである。

以下の各節において、本研究で用いた粘塑性要素の $[D]_{vp}$ マトリックスの特徴、運動方程式、メッシュ分割および境界条件について記述する。

3.1 $[D]_{vp}$ マトリックスの特徴

せん断応力 τ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ の関係を図-2に示す。図中のせん断応力軸に直交する直線(a)が剛塑性体のせん断応力-ひずみ速度関係を表し(但し、 $\bar{\sigma} = \tau_y$ とした場合)、傾斜した直線(b)はビンガム流体のせん断応力-ひずみ速度関係を表す。ここでは、図表示の簡略化の為、降伏値と塑性粘度は一定値の τ_y および 2η で示す。

図-2において、直線(a)、(b)の幾何学的な関係($\omega_i = 2\eta + \theta_i$)より、ビンガム流体のせん断応力 τ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ の関係が次のように導ける。

$$\tau = (2\eta + \theta_i) \dot{\epsilon} \quad (16)$$

ここで、 $i=1, 2, \dots$ 。また、 θ_i はひずみ速度により変化する値で、一種の粘性である。

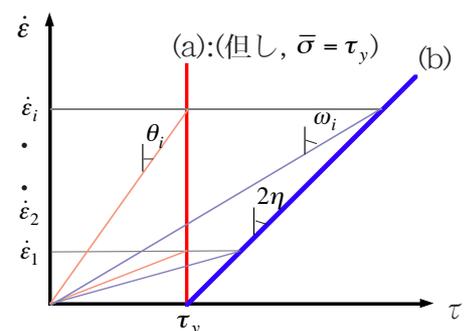


図-2 せん断応力 τ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ の関係

一般化した粘塑性構成式においても式(16)の関係は満たされなければならない。これを以下に示す。

塑性粘度 η_{J1} に係わる応力 τ_{ij}^{η} は式(17)で表され、剛塑性に係わる応力 τ_{ij}^g は式(18)で表される⁷⁾。

$$\tau_{ij}^{\eta} = 2\eta_{J1}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (17)$$

$$\tau_{ij}^g = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (18)$$

ここで、相当応力 $\bar{\sigma}$ は $f(= \tau_y - \alpha J_1)$ と見なすことができることより、式(18)は次式のように展開できる。

$$\tau_{ij}^g = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} = 2 \frac{f}{\sqrt{\Pi}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (19)$$

粘塑性は、塑性要素と粘性要素の並列モデルで表せることより、上式のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ と等しい。式(17)、式(19)の加算が一般化した粘塑性偏差応力となり、これは超過応力理論より導いた式(14)に一致する。

以上より、粘塑性体の $[D]_{vp}$ マトリックスは剛塑性の $[D]_g$ マトリックスに塑性粘度による応力増分の影響を加え合わせることで得られることが分かる。次式には、 $[D]_{vp}$ マトリックスを具体的に示す。ここで $[D]_{vp}$ マトリックスは、軸対象問題であり、体積変化が無い条件(非圧縮条件)を満たすために偏差成分と体積成分に分け、体積成分に非常に大きなペナルティ数⁸⁾ $\xi (= 10^{10})$ を乗じた。

$$[D]_{vp} = \left(\eta_{J1} + \frac{f}{\sqrt{\Pi}} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3.2 運動方程式とその離散化⁸⁾

軸対象問題の運動方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} \right) + G_z \\ \frac{\partial v}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right) + G_r \end{aligned} \right\} (21)$$

ここで、

$\frac{\partial u}{\partial D}$: 実質微分, ρ : 密度(kg/m³)

u, v : z 方向および r 方向の流速(m/s)

τ_{ij} : 応力, G : 体積力

なお、本解析では、式(21)の実質微分項の非線形加速度項を省略し、線形部分の加速度項のみを考慮した。

式(21)の右辺は有限要素法により離散化し、左辺の加速度項(線形部分)については線形加速度法で離散化すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{\Delta t} [C] + [K] \right] \{u\}^{t+\Delta t} \\ & = [C] \left\{ \frac{2}{\Delta t} \{u\}^t + \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}^t \right\} + \{G\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、

$[C]$: 質量マトリックス

$[K]$: 粘塑性マトリックス

u : 節点速度, t : 時刻, Δt : 時間刻み

本解析では、質量マトリックスを集中化質量マトリックスとして用いた。要素には4節点アイソパラメトリック要素を使用し、ペナルティ数に起因するロッキングを防ぐため、偏差応力に関する粘塑性マトリックス部分ではガウス数値積分点を 2×2 とし、平均応力に関する粘塑性マトリックス部分ではガウス数値積分点を1とする選択低減積分を用いた。また、図-2や式(14)等から理解されるように、 $[D]_{vp}$ マトリックスは一種の材料非線形性を有している。そこで、本解析では、非線形剛性方程式の解法として直接反復法を用いた。

本解析では選択低減積分を用いているため平均応力は要素中央のガウス点でしか求められない。従って、 J_1 の値は要素中央で求めた。

粘塑性ひずみ速度が流動限界値(Π_c)以上の要素は流動状態とし、 Π_c 未満の要素は不動状態とした(図-4参照)。そして、全ての要素の粘塑性ひずみ速度が Π_c 未満のとき流動停止と判断した。ここで、流動状態と不動状態の境界となる流動限界値($\Pi_c=0.1(1/s)$)は、解析において流動停止までに要する時間が実際のスランプ試験

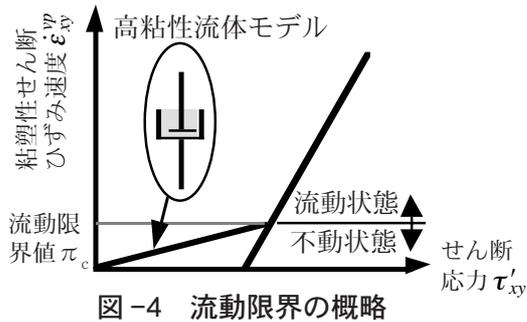


図-4 流動限界の概略

で体験される時間に近くなり、かつ、ビンガムモデルから大きく乖離しないように設定した⁸⁾。

本解析では、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{xy}$ が零であると応力 τ_{ij} が不定となり解析が行えない。そこで、不動状態の場合 ($\dot{\epsilon}_{xy} < \pi_c$) は、フレッシュコンクリートを非常に高い粘性の流体モデル(図-4参照)とし、微小ひずみ速度を与えることで近似的な不動状態とした。

3.3 メッシュ分割と境界条件⁸⁾

図-5には本解析で用いたメッシュ分割図を示す。境界条件は、対象軸上では鉛直方向を自由滑り条件とし、底面では固着条件とした。また、流動する事によって、自由表面上の節点が底面に達した場合は、その節点を固着条件とした。

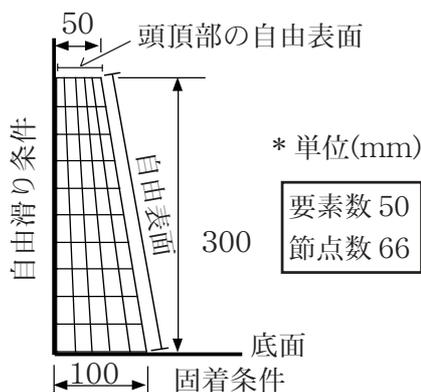


図-5 メッシュ分割図

4. 解析条件と解析結果およびその考察

本解析では、圧力が降伏値および塑性粘度に及ぼす影響を与える係数 α 、 β 値を各々0.00(圧力依存なし)、0.01,0.10と変化させ、その効果を考察した。表-1には本解析の入力パラメータを一覧にして示す。ここで、降伏値は圧力依存性がないモデル(α 、 β 値が0.00)において、ス

表-1 解析パラメータの一覧表

モデル名	降伏値 (Pa)	塑性粘度 (Pa · s)	α	β
A-1	750.0	250.0	0.00	0.00
A-2	750.0	250.0	0.01	0.01
A-3	750.0	250.0	0.10	0.10
B-1	1000.0	500.0	0.00	0.00
B-2	1000.0	500.0	0.01	0.01
B-3	1000.0	500.0	0.10	0.10
C-1	1250.0	750.0	0.00	0.00
C-2	1250.0	750.0	0.01	0.01
C-3	1250.0	750.0	0.10	0.10
D-1	1500.0	1000.0	0.00	0.00
D-2	1500.0	1000.0	0.01	0.01
D-3	1500.0	1000.0	0.10	0.10

ランプ9～18cm程度の一般的な土木・建築用のフレッシュコンクリートのスランプ値を再現するように設定した。塑性粘度は、圧力依存性がないモデルで流動停止時間が4秒前後の値となるよう設定した。

図-6(a), (b), (c), (d)には、表-1のA, B, C, D各シリーズのスランピング曲線を示す。各シリーズとも塑性粘度および降伏値が圧力依存を受けることで、スランピング速度が緩やかになり、かつ、スランプ値が小さくなる。また、スランプ停止時間も圧力依存を考慮する事で短くなっている。これらの低減効果は、圧力依存性の影響を与える係数 α 、 β 値が大きくなるほど明瞭に現れる。

図-7にはスランプ値と降伏値の関係を示す。この図において、 α 、 β 値が0.00(圧力依存性なし)と0.10(圧力依存性考慮)のスランプ値の計算結果を比較すると、圧力依存性を考慮した場合は、考慮しない場合に比べて降伏値が約350～400Pa程度上昇したのと同じ効果を持っている。従って、レオロジー試験において、圧力依存性を考慮した測定は重要であるとする。

今回の解析においては、係数 α と β を同一としたが、実際は異なることも考えられる。また、圧力依存性が α 、 β の1次関数としたが、べき乗関数等である場合も考えられる。これらについての検討は、今後の課題としたい。

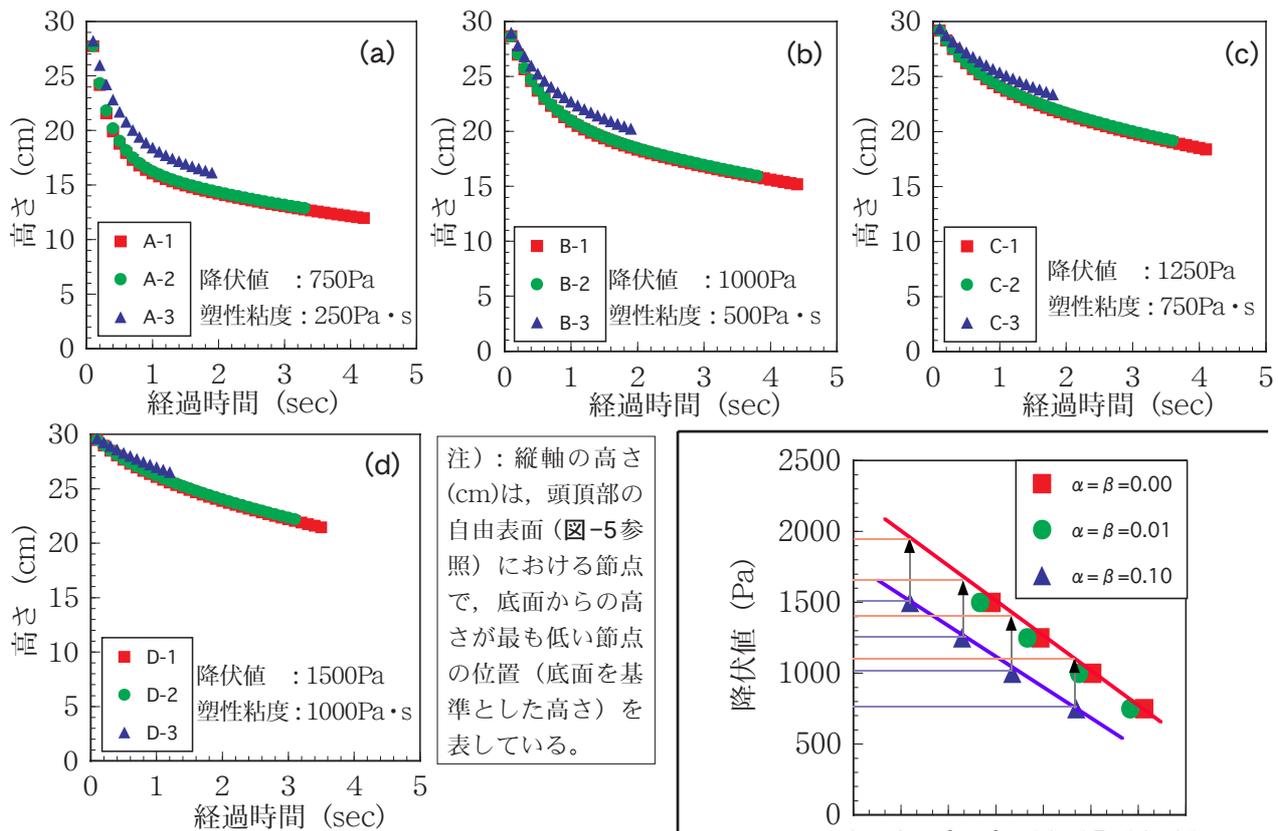


図-6 圧力依存性によるスランピング曲線の変化

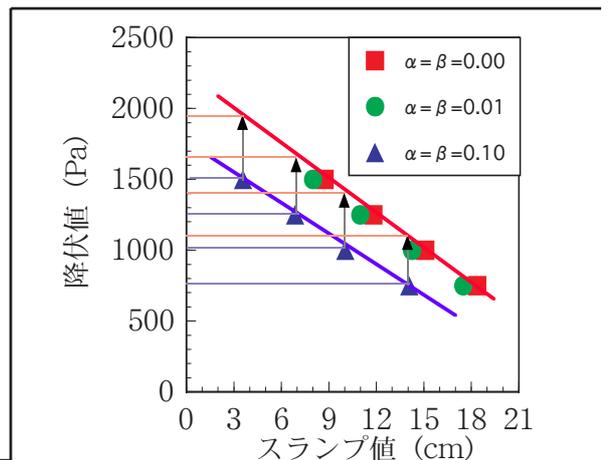


図-7 圧力依存性によるスランプ値の変化

5. まとめ

本研究では、降伏条件に Drucker-Prager の降伏関数を用い、粘塑性構成式に圧力依存性を考慮した。粘塑性ポテンシャル Q に Drucker-Prager の降伏関数を用いた関連流れ則の場合、流動時に体積が増加し続けることになり、実際のフレッシュコンクリートの流動状況とは異なることが予想された。そこで、流動中の永続的な体積増分はないと考え、粘塑性ポテンシャル Q に Mises の降伏関数を用いる非関連流れ則を採用し、非圧縮条件を満たした。

得られた粘塑性構成式による運動方程式を粘塑性有限要素法にて離散化し、スランプ試験を対象に幾つかのパラメータで数値解析を行ったところ、圧力依存性の効果が確認された。

参考文献

1) 山田義智, 富山潤: 履歴現象を考慮した粘塑性流体の構成式に関する研究, コンクリート工学年次論文集, Vol.25, No.1, pp.899-904, 2003.6

2) 社団法人日本コンクリート工学協会: フレッシュコンクリートの力学モデル研究委員会報告書, pp.56-59, 1996.4

3) 森博嗣, 谷川恭雄: フレッシュコンクリートの構成式に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第396号, pp.9-16, 1989.2

4) Perzyna, P.: The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic, Proc. Vibrational Problems, Warsaw, pp. 281-290, 1963

5) 王志剛 ほか: 溶融を考慮した粘塑性体の構成式とそれを用いた溶接過程の解析, 日本機械学会論文集(A編), Vol.50, No.459, pp.1900-1908, 1984

6) 松本孝芳: 分散系のレオロジー, 高分子刊行会, pp.67, 1997.8

7) 日本塑性加工工学会編: 非線形有限要素法, コロナ社, pp.36-70, 1994

8) 山田義智, 大城武: フレッシュコンクリートの粘塑性構成式とその流動特性に関する解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.24, No.1, pp.855-860, 2002.6