

論文 SPH 法によるフレッシュコンクリートの流動解析

崎原 康平^{*1}・伊良波 繁雄^{*2}・入部 綱清^{*3}・富山 潤^{*4}

要旨：従来，フレッシュコンクリートの流動特性の解析的研究は差分法，有限要素法などが用いられてきた。本論文では，解析領域の大変形を比較的容易に表現できるセルや要素を必要としない粒子法の一つである SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法に非圧縮アルゴリズムを導入し，構成則にビンガムモデルを用いたフレッシュコンクリートの流動解析に適用する為，トレーサ粒子の流跡線の比較を行いその有用性を示した。

キーワード：SPH，ビンガムモデル，レオロジー，L 型フロー試験

1. はじめに

近年，構造物の複雑化に伴い，配筋の過密化や充填確認の困難な部分でのコンクリート打設時における施工不良が問題となっている。そのため，従来のコンクリートより充填性に優れた高流動コンクリートの開発が盛んに行われており，その流動特性を力学的に評価しようとするレオロジー的な研究も盛んに行われている¹⁾。

また，計算機性能の発達に伴い，各種の数値計算手法が工学分野においては，構造解析，流体解析などの諸問題の解析に適用されている。

フレッシュコンクリートを連続体と仮定した求解法としては有限要素法¹⁾やフリーメッシュ法²⁾等が挙げられる。しかし，前者は変形に伴い歪んだ要素の発生により，解が発散する可能性がある。一方フリーメッシュ法は毎ステップごとに領域内部のリメッシング処理を行うことで 3 次元解析にも適用可能であるが，表面パッチが歪むと解析が破綻するといった問題がある。

このため本研究では，解析領域の大変形を比較的容易に表現でき，セルや要素を必要としない粒子法の一つである SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法³⁾に非圧縮性アルゴリズムを導入し，フレッシュコンクリートの流動解析に適用した。

2. SPH 法³⁾

SPH 法は連続体を解く数値解析法の一つである。解析領域の大変形を比較的容易に表現でき，また，通常の Euler 的方法とは異なり，格子を用いず，移流項の離散化を行わない完全ラグランジェ法であるため，移流項による数値拡散を生じることがない。

2.1 流体の基礎式

非圧縮性流体の支配方程式は，次式の連続の式と Navier-Stokes 式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

ここで， ∇ は勾配， ∇^2 はラプラシアン， $\mathbf{u}$ は流速ベクトル， p は圧力， ρ は流体の密度， $\mathbf{F}$ は外力ベクトル， ν は動粘性係数である。また，本解析では Navier-Stokes 式を誘導する際に用いられる式(3)で示す構成式の代わりに次項で説明するフレッシュコンクリートの構成式を用いた。

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (3)$$

ここで， τ_{ij} ， $\dot{\epsilon}_{ij}$ はそれぞれ粘性流体のテンソル，ひずみテンソルである。 P は静水圧， δ_{ij} はクロネッカーデルタ， η は粘性係数である。

*1 琉球大学大学院	理工学研究科環境建設工学科専攻	学士(工学) (正会員)
*2 琉球大学	工学部環境建設工学科教授	博士(工学) (正会員)
*3 琉球大学大学院	理工学研究科環境建設工学科専攻	修士(工学) (正会員)
*4 琉球大学	工学部環境建設工学科助手	博士(工学) (正会員)

2.2 SPH 法の基礎理論

SPH 法では、位置 x の物理量を $f(x)$ そのものでなく、以下の Kernel 近似の概念を用いる。

$$f(x) = \int f(x') W(x-x', h) dx' \quad (4)$$

ここで、 $f(x)$ は任意の関数、 $W(x-x', h)$ は重み関数、 h は影響半径、 x 、 x' はそれぞれ評価中心、任意粒子の座標値である（図-1）。

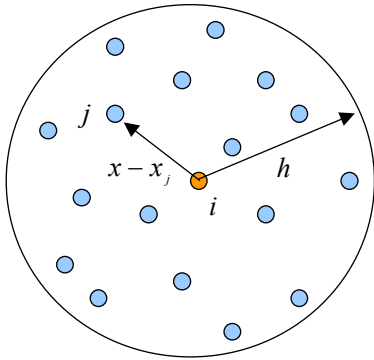


図-1 SPH 理論の概念図

同様に 1 階微分 $\nabla \cdot f(x)$ は $W(x-x', h)$ の 1 階微分 $\nabla W(x-x', h)$ を用いて次式のように表す。

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \int f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \quad (5)$$

重み関数 $W(x-x', h)$ の候補には多数提案されているが、本手法では現在一般的な 3 次の Spline 関数を用いている（図-2）。

$$W(x-x') = \frac{10}{7\pi h^2} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}v^2 + \frac{3}{4}v^3 & (0 \leq v \leq 1) \\ \frac{1}{4}(2-v)^3 & (1 \leq v \leq 2) \\ 0 & (2 \leq v) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $v = |x-x'|/h$ である。

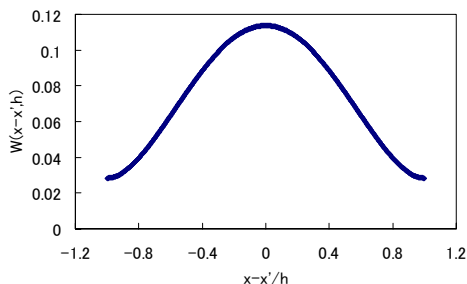


図-2 Spline 関数

2.3 運動方程式

今、粒子を流体の速度で動かすとすれば、運動量保存則は次式を用いて表現できる。

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla P_i \quad (7)$$

しかし、式(7)の右辺項を SPH 理論の一階微分式にそのまま適用すると一定圧力に対する粒子間力はゼロであり、安定性は好ましいが線形運動量と角運動量は厳密には保存されないので式(7)の右辺の圧力項を次式のように変形する。

$$\left. \frac{\nabla P}{\rho} \right|_i = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right)_i + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho_i \quad (8)$$

式(8)に対して式(7)の右辺各項に微分を行えば次式を得る。

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \cdot \nabla W(x-x_j, h) \quad (9)$$

Kernel に対称性があれば粒子に働く力の大きさが同じで向きが逆になり、粒子の中心を結ぶ線上に作用するので、線形運動量と角運動量は厳密に保存される。

2.4 非圧縮性流体への適用及び粘性項の導入

SPH 法は基本的には圧縮性流れであるが、近年 SPH 理論に基づく様々な非圧縮性流体解析手法が提案されている。その代表的なものとしては SPH 法の開発者である Monaghan ら⁴⁾や Cummins ら⁵⁾の手法などが挙げられるが、前者らは非圧縮性を密度と圧力の状態方程式から導いており、厳密な非圧縮性の実現の困難や、また後者らの手法は Navier-Stokes 式の粘性項に人工粘性が使用されているため人為的な影響に関わる可能性があるなどの問題がある。そこで本手法では酒井らが提案した流体の応力場を解析することにより SPH 法における 1 階微分の操作のみで式(2)の粘性項を扱う手法を採用した⁶⁾。

3. 基本アルゴリズム

本手法のアルゴリズムは、式(10)の非圧縮条件を満足させる必要がある。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

そのため密度と比例関係にある粒子数密度を一
定に保たなければならない。そこで本手法では
MPS 法⁷⁾で導入された粒子数密度一定条件を採
用する。本手法では初期配置から粒子数密度 n^0
と毎ステップ計算される粒子数密度 n^* を一致
させることで非圧縮条件を満たしている。

式(2)を解くには、はじめに運動量保存則の圧
力項以外の項を計算し、仮の速度 $\bar{v}_i^*$ と位置 $\bar{x}_i^*$
を求める。

$$\bar{x}_i^* = \bar{x}_i^n + \bar{v}_i^* \Delta t \quad (11)$$

仮の位置 $\bar{x}_i^*$ で求められる粒子数密度 n^* は n^0
とは一致していない。このため、粒子の圧力と
修正速度は、 n^* から n^0 への修正量から陰的に計
算される。

$$\nabla^2 P^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (12)$$

式(12)は圧力に関する Poisson 方程式であり、こ
の Poisson 方程式の左辺項は2階微分方程式に
なっているため SPH 法の基本式から直接離散
化することができない。そこで本手法では酒井
らが開発した次式の2階偏微分方程式を用いて
式(12)の左辺項を離散化する。

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{4m_j}{\rho_j(\rho_j + \rho_i)} \cdot \frac{|x_i - x_j| \cdot \nabla_i W_{ij}}{|x_i - x_j|^2} \quad (13)$$

上式で求められた修正圧力を式(7)に代入し
修正速度 $\bar{v}_i'$ が得られ、仮の更新速度 $\bar{v}_i^*$ に足し合
わせて次のステップの速度 $\bar{v}_i^{n+1}$ を得る。また $\bar{v}_i'$
より修正される変位 $\bar{v}_i' \Delta t$ を仮の位置 $\bar{x}_i^*$ に加え、
次のステップの位置 $\bar{x}_i^{n+1}$ とする。上記で得られ
た速度を微分してひずみ速度、粘性応力をもと
め、得られた応力をさらに微分するという2段
階操作により SPH 法における1階微分式のみ
で粘性項を算出している。図-3に SPH 法のフ
ローチャートを簡単に示す。

3.1 フレッシュコンクリートの構成則⁸⁾

一般に、ビンガム流体はせん断応力が降伏値
を超えるまでひずみ速度がゼロであり本手法で
は、解析が不可能である。そこで本手法ではせ

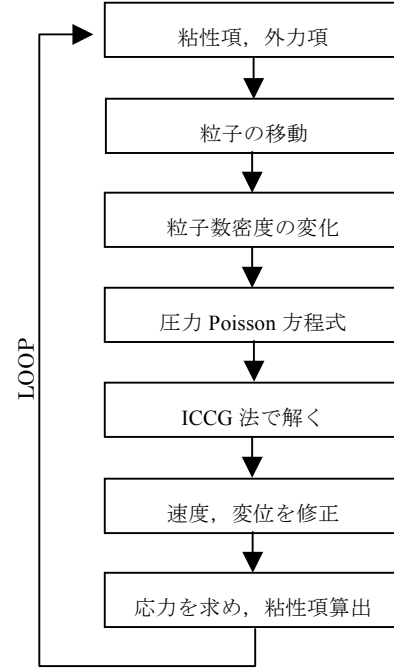


図-3 SPH 法のフローチャート

ん断応力が降伏値に達するまでを高い粘性を持
つ流体とし、流動速度を非常に小さくすること
で不動状態として扱う bi-viscosity モデルを用い
た(図-4)。流動時におけるフレッシュコンクリ
ートの構成モデルは図-5 に示す粘塑性モデル
と仮定し、構成式は次式で表される。

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\left(\eta + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}^v \quad \Pi \geq \Pi_c \quad (14)$$

ここで、 τ_y は降伏値、 η は塑性粘度、 δ_{ij} はクロ
ネッカーのデルタであり、 $\Pi = 2\dot{\varepsilon}_{ij}^v \dot{\varepsilon}_{ij}^v$ である。
また、流動開始値未満の不動時における構成モ
デルは図-6 に示す高粘性の流体モデルと仮定
し、構成式を次式で表す。

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\left(\eta + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi_c}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}^v \quad \Pi < \Pi_c \quad (15)$$

式(17)の $\dot{\varepsilon}_{ij}^v$ は不動時のひずみ速度、 Π_c は流動
時、不動時の降伏基準値である流動限界ひずみ
速度であり、 $\Pi_c = (2\pi_c)^2$ である。

また、本解析では π_c を次式で定義する。

$$\pi_c = \frac{\beta \tau_y}{\eta} \quad (16)$$

β の値は本手法における不動時とみなされ

る粒子の粘度を決定する値であり、本解析では計算上の安定性を考慮し、 β 値を 0.5 とした。しかし、値は富山ら²⁾の研究($\beta=0.1$)と比較すると高めの設定となっている。

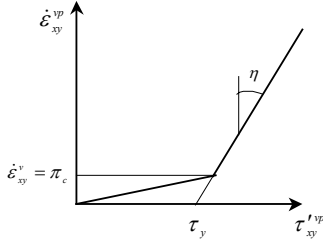


図-4 bi-viscosity モデル

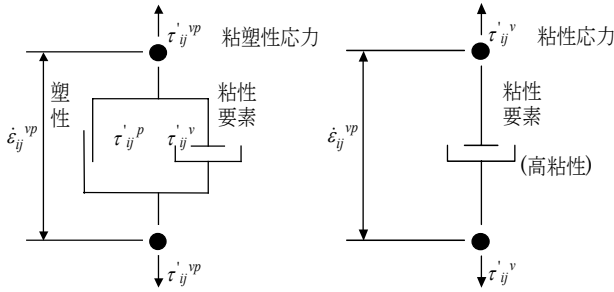


図-5 流動時

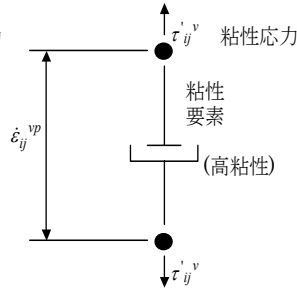


図-6 不動時

3.2 SPH 法によるフレッシュコンクリートの流動解析

式(14), (15)での流動判定に用いられる Π は、前項で示したように次式で表される。

$$\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\epsilon}_{xx}^{vp2} + \dot{\epsilon}_{yy}^{vp2} + \dot{\gamma}_{xy}^{vp2}/2 \quad (18)$$

$\dot{\epsilon}_{xx}^{vp}$ は x 方向のひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{yy}^{vp}$ は y 方向のひずみ速度、 $\dot{\gamma}_{xy}^{vp} (=2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp})$ はせん断ひずみ速度である。各ひずみ速度は、

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx}^{vp} & \dot{\gamma}_{xy}^{vp} \\ \dot{\gamma}_{yx}^{vp} & \dot{\epsilon}_{yy}^{vp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (19)$$

で表される。

ここで導出された各ひずみ速度を式(17)に代入し、 Π を求めることができる。

SPH 法のフローチャートでは、毎ステップの位置が更新された後に次のステップでの粒子の流動判定を行っている。

4. 数値解析例

ここでは、本解析手法で用いた非圧縮アルゴリズムの導入手法の妥当性を検討するため、粘性の低い流体に関して水柱崩壊問題の解析を行った。図-7は崩壊進行状況である。時間の経過とともに界面が滑らかな曲面を描きながら崩壊していく様子をシミュレートできているのが確認できる。図-8に崩壊する水柱の先端位置の変化を示す。ここで Z は流動フロー値、 L は水柱幅、 t は時間、 g は重力加速度である。比較のために Martin らが行った実験結果も同時に示す。右壁に衝突するまでの本解析の計算結果と実験値とはよく一致しているのが確認できる。以上ことから、本手法における非圧縮アルゴリズムの導入手法は妥当な結果を示していると考えられる。

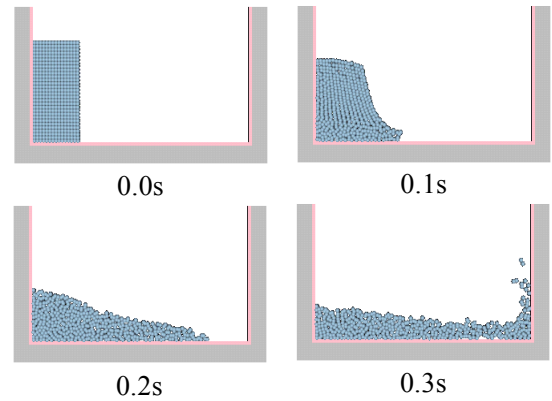


図-7 水柱崩壊進行状況

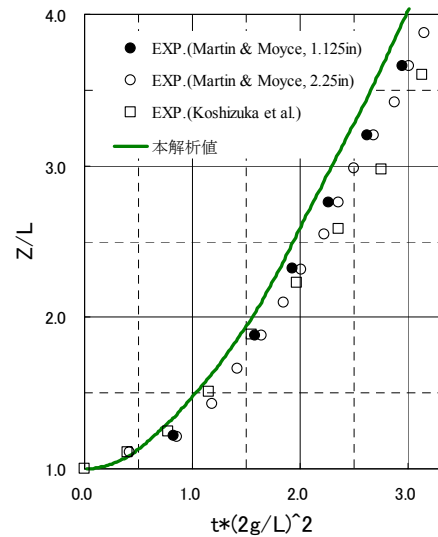


図-8 水柱崩壊問題における先端位置の変化⁷⁾

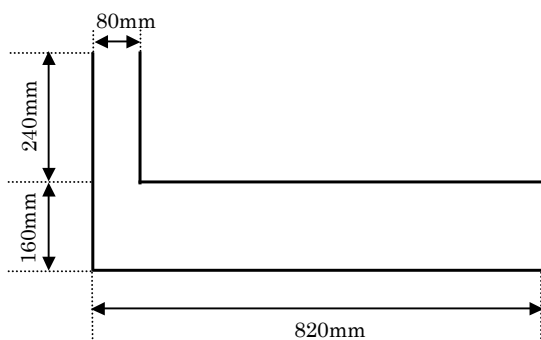
次に図－9に示すようなフレッシュコンクリートのL型フロー試験を対象に流動解析を行った。図－10は本手法で図－9をモデル化したものである。外側に壁粒子、内側に境界粒子を配置し、管内に配置するフレッシュコンクリート粒子の総数を1280粒子とした。解析例として降伏値を150Pa、塑性粘度を50Pa・s、解析は時間ステップ0.0001sで行った。

図－11はL型フロー試験の解析進行状況を示す。なお、本解析でフレッシュコンクリートを上段、中段、下段の3層に色分けし、流動挙動がより可視化的に確認できるようにした。

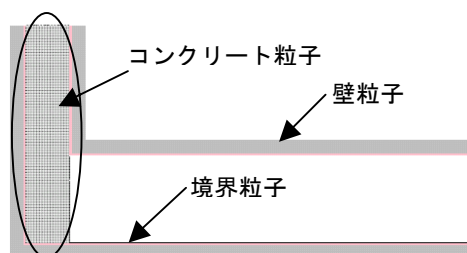
図－11より、フレッシュコンクリートの先端が下段、中段、上段の順に底面に対して巻き込みながら時間とともに流動している様子をシミュレートできているのが確認できる。

図－12は佐藤ら⁹⁾が行ったL型フロー試験の流動挙動の可視化実験結果を示したものである。実験では可視化領域をL型コーナー付近とし、図－12(a)のように分割している。

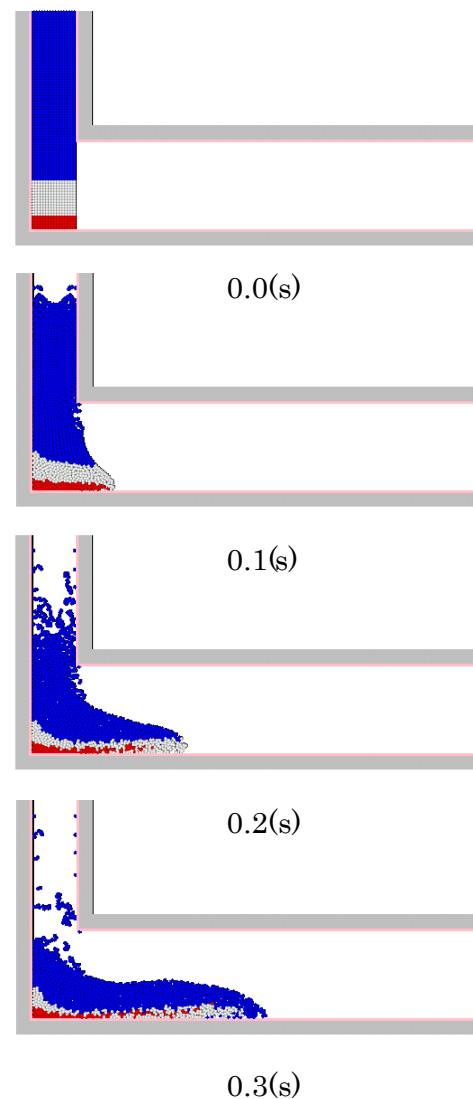
図－13は本解析結果より流跡線を求めたものである。解析結果は図－12と同様に左側の壁付近での鉛直方向の移動量が少なく、中段、下段のL型コーナー付近では停滞域が確認できた。



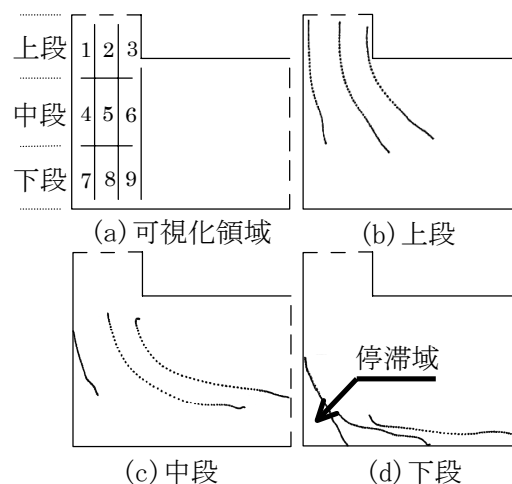
図－9 L型フロー試験解析



図－10 本手法のモデル化



図－11 L フロー試験解析進行状



図－12 佐藤らの実験
(L型フロー試験の流跡線)

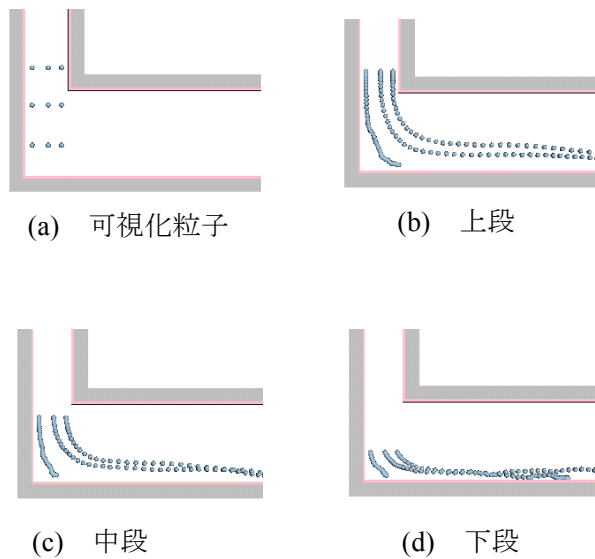


図-13 本解析結果の流跡線(降伏値 150Pa)

5. 結論

本研究では粒子法的一种である SPH 法に非圧縮アルゴリズム及び粘性項を導入し、その妥当性を検討した。また、フレッシュコンクリートの構成式を適用し、数値解析例として L 型フロー試験を対象に流動解析のシミュレーションを行った。その結果を以下に示す。

- (1) 低粘性流体を対象とした水柱崩壊解析を行い、本手法の解析結果と Martin らが行った実験結果と比較したところ、実験値に近い値を得た。また、時間の経過とともに界面が滑らかな曲面を描きながら崩壊していく様子をシミュレートできた。
- (2) L 型フロー試験を対象にしたフレッシュコンクリートの流動解析においては、先端粒子を巻き込みながら時間とともに流れ出す状況を表現できた。L フロー値に対する本解析の精度評価は今後行う予定である。
- (3) 本手法から得られた流動状況と、佐藤らの行ったトレーサー粒子の流跡線との比較を行った結果、上段、中段、下段でそれぞれ

の流動特性を表すことができた。とくに下段においては、L 型フロー試験でみられる停滞域を表現することができた。

謝辞

本研究を行うにあたり、山田義智琉球大学助教授に有益な助言を賜りました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 森博嗣, ほか: フレッシュコンクリートの流動解析技術の現状, コンクリート工学, Vol.32, No.12, pp.30-40, 1994.12
- 2) 富山潤, ほか: フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの流動解析に関する研究, 土木学会論文集, No.764, V-61, pp.91-101, 2003
- 3) 酒井譲, ほか: SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.67, pp.1093-1102, 2001
- 4) J.J. Monaghan, J. Comput. Phys. 110(1994), 399
- 5) S.J. Commins and M. Rudman, J. Comput. Phys. 136(1997), 214
- 6) 酒井譲, ほか: SPH 粒子法による流体・構造連成解析, 計算工学講演会論文集, Vol.8, pp.123-126, 2003
- 7) 越塚誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, p163, 1997
- 8) 山田義智, ほか: 有限要素法によるフレッシュコンクリートの粘塑性流動解析, コンクリート工学年次講演会報告集, Vol.23, No.2, pp.253-258, 2001
- 9) 佐藤良一, ほか: 超流動コンクリートのコンシステンシー評価試験の可視化, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.16, No.1, pp.189-194, 1994.6