コンクリート工学年次論文集，Vol.25，No.2，2003

論文　回転自由度を有する3次元要素を用いたフリーメッシュ法

松原　仁*1・伊良波　繁雄*2・富山　潤*3・矢川　元基*4

要旨：一般に，有限要素法・フリーメッシュ法などの解析手法では，解析精度は使用する要素に極めて依存する。特にフリーメッシュ法では，局所要素生成の制約により，従来，3次元解析においては，定ひずみ四面体要素が用いられ，解析対象によっては精度上の問題が指摘されている。そこで，本研究ではフリーメッシュ法で，高精度なコンクリートの3次元解析を行うために，回転自由度を有する4節点四面体要素を開発した。数値解析例として，要素の精度評価を行い，実際のコンクリート構造物の3次元応力解析に応用し良好な結果を得た。

キーワード：高精度要素，フリーメッシュ法，3次元応力解析，コンクリート

1.　はじめに

近年，コンクリート構造物は大型化・複雑形状化する傾向にあり，また，計算機性能の著しい発展に伴い，実験では難しい問題に対して，大規模な3次元数値計算技術が重要視されている。特に要素生成が不要，あるいは要素を意識しないで解析を行うことができるメッシュレス法は，解析者の負担を軽減させることができるため，その期待は高まっている。

フリーメッシュ法（FMM）[1)]は，上記のメッシュレス法の後者にあたり，筆者らはFMMをコンクリートの2次元・3次元問題に適用し，良好な結果を得てきた[2),3)]。また，2次元FMMでは，高精度な要素を開発し，FMMに適用し，コンクリートの応力解析[4)]，フレッシュコンクリートの流動解析[5)]への有効性を示した。

そこで，筆者らは，コンクリートの高精度な3次元解析を行うことを目的とし，回転自由度を有する平面三角形要素の誘導方法を3次元に拡張し，回転自由度を有する4節点四面体要素（D-TET）を開発した[6)]。本論文では，D-TETのさらに詳細な定式化及び，精度評価を行い，実コンクリート構造物の応力解析へと応用する。

2.　回転自由度を有する四面体要素の定式化

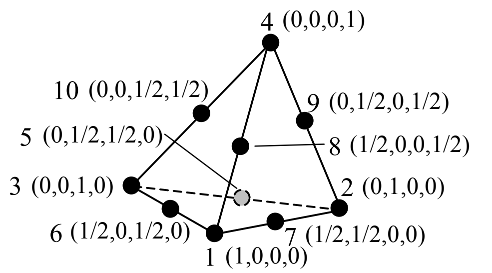


図-1　10節点アイソパラメトリック要素

ここでは，10節点アイソパラメトリック要素(I-TET)[7)]を利用して，D-TET を定式化する。I-TET は解析領域が曲率を有している問題などの場合，高精度な解を得ることができ[8)]，これまで，3次元FEM解析では多く用いられてきた。

図-1に体積座標系でのI-TETと各節点の座標を示す。I-TET の詳しい説明は文献(4)に詳しいのでここでは簡単に説明する。

I-TETの要素剛性マトリックス（$[k']$）は体積座標を用いて，

*1 琉球大学大学院　理工学研究科　環境建設工学専攻　修士（工学）　（正会員）
*2 琉球大学助教授　工学部環境建設工学科　博士（工学）　（正会員）
*3 琉球大学助手　工学部環境建設工学科　博士（工学）　（正会員）
*4 東京大学大学院教授　工学系研究科　システム量子力学専攻　工学博士

$$[k'] = \int_0^1\int_0^{1-\zeta_1}\int_0^{1-\zeta_1-\zeta_2}[B]^T[D][B]\det[J]\,d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (1)$$

と表すことができる。ここで，$[B]$はひずみマトリックス，$[D]$は応力マトリックス，$[J]$はヤコビヤンマトリックスである。また，本研究では，式(1)の体積積分については，ガウスの数値積分法[6)]により計算した。

高精度な解を得ることのできるI-TETは，四面体の各辺の中間に節点を持つために，直接FMMへは適用できない。このため本研究では，新たに導入した頂点の回転角（**図-2**参照）を用いてI-TETの中間節点変位を縮約した。具体的にはI-TETの各辺を仮想的に梁要素と仮定し，中間節点変位と頂点の回転角の関係式を利用する。

局所座標系は，**図-2**のようにij辺の軸方向をx^*と仮定し，x^*に直交する面上にy^*及びz^*をとる。このとき，xy平面とx^*y^*平面が接する線上にy^*軸をとり，y^*軸の正の方向は，z^*が増加するとき，z軸のz値も同時に増加するように仮定する。局所座標系でのi点でのz^*軸まわりのモーメントによる回転角を$\theta^*_{iz^*}$，y^*軸まわりのモーメントによる回転角を$\theta^*_{iy^*}$とし，j点でも同様にモーメントによる回転角を$\theta^*_{jz^*}$，$\theta^*_{jy^*}$とする。これらのi, j点の回転角によるij間の変位は，局所座標系でのx^*方向の変位を$u^*_{x^*ij}$，y^*方向の変位を$v^*_{x^*ij}$，z^*方向の変位を$w^*_{x^*ij}$とし，3次式で仮定すると，

$$\begin{cases} u^*_{x^*,ij} = 0 \\ v^*_{x^*,ij} = +\theta^*_{iz^*} l_{ij}\left(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi\right) + \theta^*_{jz^*} l_{ij}\left(\xi^3 - \xi^2\right) \\ w^*_{x^*,ij} = -\theta^*_{iy^*} l_{ij}\left(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi\right) - \theta^*_{jy^*} l_{ij}\left(\xi^3 - \xi^2\right) \end{cases} \quad (2)$$

のようになる。式(2)で，l_{ij}は辺ijの長さ，$\xi = x^*/l_{ij}$である。なお，式(2)では，i, j点に作用する局所座標系でのねじりモーメントによる変位は無視すると仮定している。

式(2)より，ij辺の中間節点変位は，$\xi = 1/2$を代入することにより求めることができ，これをマトリックス表示すると次式となる。

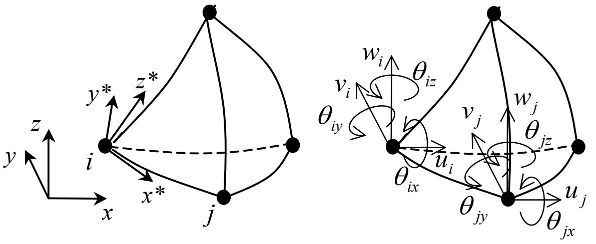


図-2　回転自由度を有する四面体要素

$$\begin{Bmatrix} u^*_{M,ij} \\ v^*_{M,ij} \\ w^*_{M,ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 & 0 & -l_{ij}/8 \\ 0 & -l_{ij}/8 & 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 \end{bmatrix} \{\theta^*\}; \quad (3)$$

$$\{\theta^*\} = \{\theta^*_{ix^*} \quad \theta^*_{iy^*} \quad \theta^*_{iz^*} \quad \theta^*_{jx^*} \quad \theta^*_{jy^*} \quad \theta^*_{jz^*}\}^T$$

ここで，式(3)の右辺のマトリックスを$[t'_{ij}]$とする。式(3)は局所座標系での式であるから，左辺は全体座標系での節点変位，右辺の回転に関する項は全体座標系での節点の回転角（$\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}$，$\theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz}$）を用いて次のように全体座標系に変換する必要がある。

$$\left.\begin{aligned} &\{u_{M,ij} \quad v_{M,ij} \quad w_{M,ij}\}^T = [t_{ij}]\{\theta\} \\ &[t_{ij}] = [\lambda]^T[t'_{ij}]\begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \\ &\{\theta\} = \{\theta_{ix} \quad \theta_{iy} \quad \theta_{iz} \quad \theta_{jx} \quad \theta_{jy} \quad \theta_{jz}\}^T \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ここで，（$u_{M,ij}, v_{M,ij}, w_{M,ij}$）は全体座標系での中間節点変位を表し，$[\lambda]$は局所座標系から全体座標系への座標変換マトリックスである。

中間節点変位は，式(4)で求めた回転角による分と，各頂点がもつ全体座標系でのx, y, z方向の変位の影響も受ける。そこで頂点の全体座標系での変位$(u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j)$の影響を考慮すると，全体座標系での中間節点変位（$u_m, v_m, w_m$）は，次式となる。

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_i + u_j)/2 + u_{M,ij} \\ (v_i + v_j)/2 + v_{M,ij} \\ (w_i + w_j)/2 + w_{M,ij} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

I-TETでの頂点および辺中央の変位の内，辺中央だけの変位を式(5)を用いて変形し，全変位間の関係を示すと次のように表すことができる。

$$\{\delta'\} = [T]\{\delta\} \quad (6)$$

ここで，$\{\delta'\}$はI-TETの節点変位ベクトル，$\{\delta\}$はD-TETの節点変位ベクトルであり，節点iでの変位ベクトルを示すと，$(u_i, v_i, w_i, \theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz})$とな

り，図-2に示すように一節点あたり6個の自由度を有することになる。

よって，本要素のひずみエネルギーUは，

$$U=\frac{1}{2}\int_{V^e}\{\delta\}^T[T]^T[B]^T[D][B][T]\{\delta\}dv \tag{7}$$

と表すことができ，D-TETの要素剛性マトリックス$[k]$は，

$$[k]=[T]^T[k'][T] \tag{8}$$

と導くことができる。なお，D-TETの形状関数は通常のI-TETと同じものである。

ここで，注目すべきことはI-TETと比較して，一要素あたりの自由度が6個減少していることである。

具体的な$[T]$は$[t_{ij}]$を用いて，

$$[T]=\begin{bmatrix} [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{12}] & [e_{1/2}] & [t_{21}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{13}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{31}] & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{14}] & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{41}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{23}] & [e_{1/2}] & [t_{32}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{34}] & [e_{1/2}] & [t_{43}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{24}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{42}] \end{bmatrix} \tag{9}$$

と表すことができる。ただし，$[t_{ij}]$のi, jは四面体の頂点の節点番号であり，その他の各マトリックス成分はつぎのようになる。

$$[e_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ [e_{1/2}]=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

3.　フリーメッシュ法

FMM[1)]は，図-3 に示すように解析領域内に配置された各節点（中心節点）毎に，その付近の節点（衛星節点）を集めてローカルな領域で一時的に四面体要素を作成する。これらの一時的な四面体要素の要素剛性マトリックスから中心節点に寄与する行成分のみを全体剛性マトリックスに足し合わせる。これを全ての節点で行い，全体剛性マトリックスを作成し，連立一次方程式を解く。このように FMM はローカルな要素生成，全体剛性マトリックスの作成及び求解までをシームレスに行うことができる。

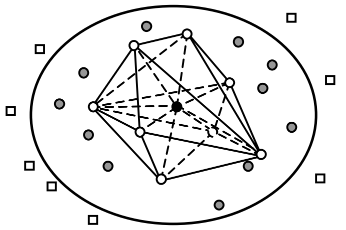
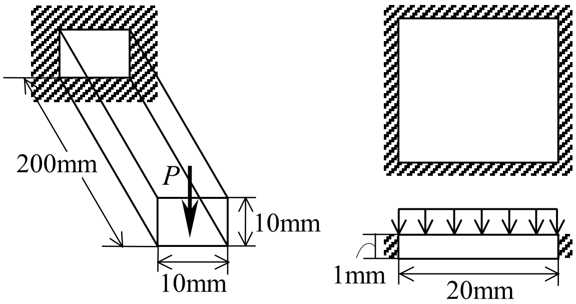


図-3 ローカル要素概念図

なお，ひずみ・応力の評価は，1 点積分の場合は中心節点周りの全ての局所要素ひずみ・応力の平均値，4 点，5 点積分の場合は中心節点に最も近い積分点の局所要素全ての平均値とした。

4.　数値解析例

4.1　精度評価

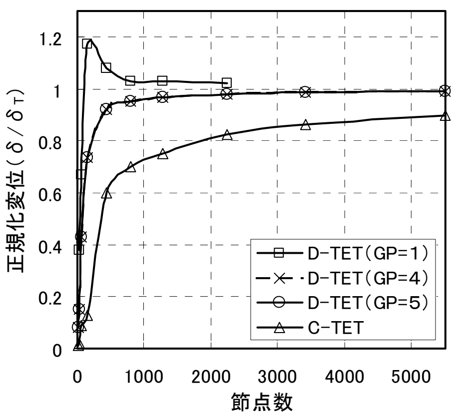


(a) 片持ち梁モデル　　(b) 正方形板モデル

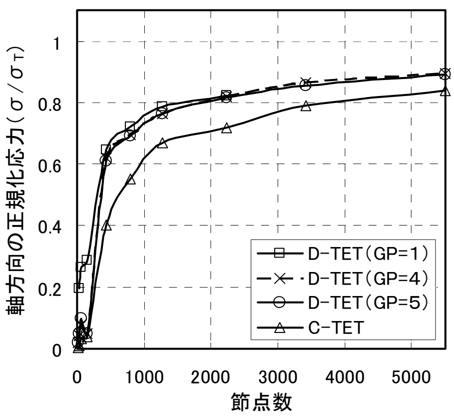
図-4　精度比較のための解析モデル

ここでは，D-TETを使用したFMMによる先端に集中荷重を受ける片持ち梁の変位・応力の精度評価と，等分布荷重を受ける四辺固定端の板の曲げによる変位の精度評価を行う[9)]。解析モデルを図-4に示し，図-5に節点数と正規化値の関係を示す。ここで，正規化値とは，解析解を厳密解で除した値であり，厳密解については，梁の自由端変位の場合は，せん断変形を考慮に入れたたわみ公式[9)]を用い（δ_T），軸方向応力については，初等梁理論から導かれる梁下面軸方向応力（σ_T）[9)]，平板の場合は，薄板平板理論による載荷軸方向の最大変位（δ_T）[10)]である。なお，図中のGP はD-TETのガウス積分点の個数を表し，C-TETは定ひずみ四面体要素を用いた既存FMMによる結果である。図-5より，両問

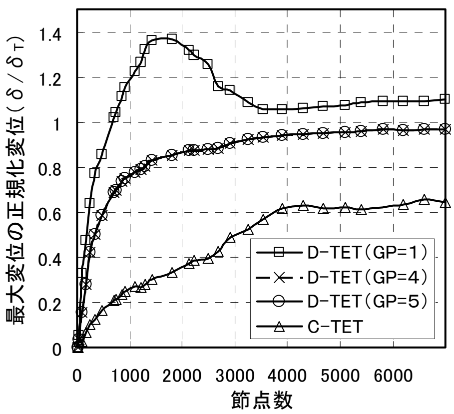
題に対して，変位及び応力ともD-TETによる結果はC-TETを用いた場合よりも，少ない節点数で高い精度を得ており，厳密解への収束性も良い（D-TETがC-TETより1節点あたりの自由度が2倍としてもD-TETの精度が良い）。特に，**図-5**の(c)から分かるように湾曲した3次元的な曲げ挙動を示す板の曲げ問題に対して，その差は顕著である。一方，積分点の変化による精度変化を見てみると，**図-5**の(b)より，応力に関しては，積分点による変化はほとんど見られないが，同**図**(a)，(c)より，変位の精度変化は，1点積分の場合は厳密解の上側から近づき，4，5点積分の場合は下側から近づくという特徴を持っていることがわかる。しかし，1点積分を用いた場合は，「同じ節点数・節点分布を用いても解が収束しない」，という問題があった。これは，1点積分では要素・節点分布により解析領域の体積積分を厳密に行うことができないとも解釈することができる。よって，D-TETで安定した解を得るためには，4点積分もしくは，5点積分を用いる方が良いと考えられる。これ以降，本論文では，D-TETには4点積分を用いることにする。



(a)梁の自由端変位の精度変化



(b) 梁の軸方向応力(固定部から100mmの梁下端)の精度変化

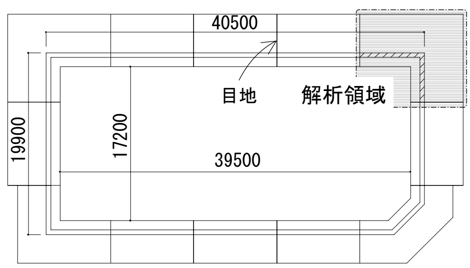


(c) 板の最大変位の精度変化

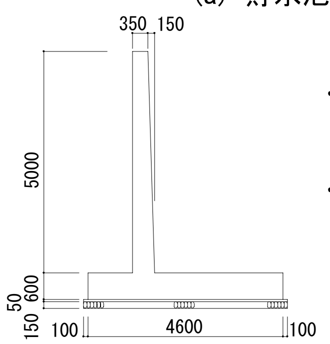
図-5　片持ち梁と正方形板の精度変化

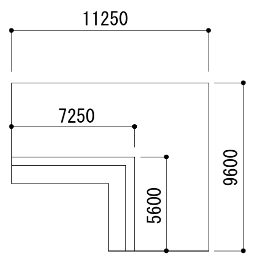
4.2　貯水池の応力解析

ここでは，沖縄県にあるコンクリート製農業用貯水池（**図-6参照**）の応力解析を行う。この構造物は，逆T形擁壁でできており，壁面背後の埋土完了後の**図-6**に示す隅角部に**図-7**のような多数のひび割れが発見された。そこで，本研究では，その原因について，D-TETを用いて考察した。解析対象をひび割れが生じている**図-6**に示



(a) 貯水池平面図





(b) 解析領域断面図　(c) 解析領域平面図

図-6　コンクリート製貯水池（単位：mm）

す貯水池隅角部の1ブロックとした。この問題を解析するにあたり，境界条件として，隅角部底面（地盤に接する部分）を完全固定とし，壁面にかかる外力は，壁面背後の主働土圧計算結果により，127.3kN/mの三角形分布荷重を与えた。

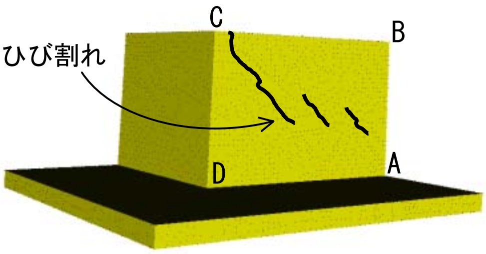
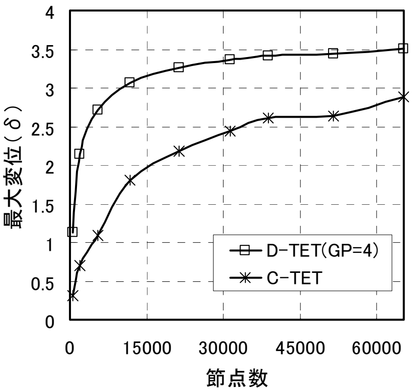
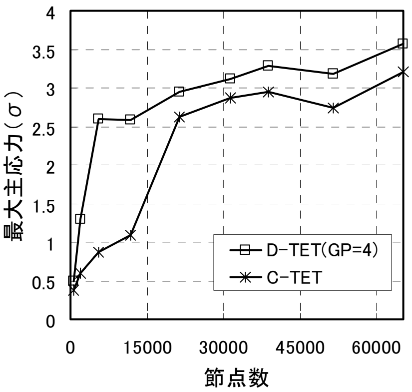


図-7　壁面背後のひび割れ状況



(a)　節点数 - 最大変位関係



(b)　節点数 - 最大主応力関係

図-8　節点数の増加による解の収束性

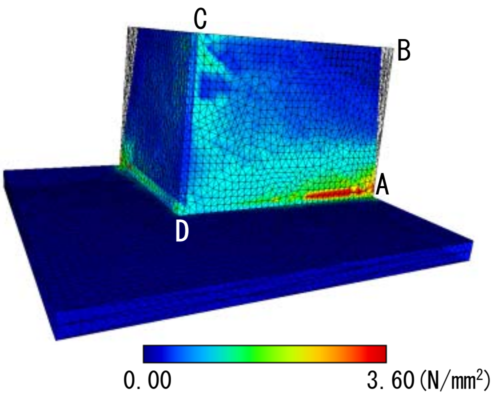


図-9　D-TET による主応力分布

また，この問題は厳密解の計算が困難なため，多数の異なる節点数で解析を行うことにした。

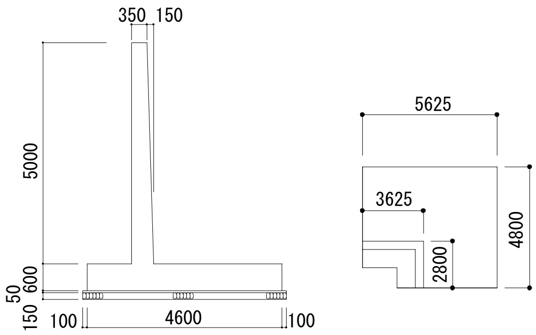
図-8に節点数-最大変位（**図-7**のB点の壁面垂直方向），節点数-最大主応力（**図-7**のA点付近の主応力度）の関係を示す。参考までにC-TETによる結果も同時に示した。また，**図-9**には，D-TETによる主応力分布を示す。

図-8より，D-TETを用いた場合の最大変位は約3.5mm程度で収束しているが，C-TETを用いた場合は，スムーズな解の収束は見られない。

よって，本構造物の最大変位は3.5mm程度であると推測できる。このように，厳密解の算出が困難な問題を扱う場合，D-TETを使用し，異なる節点数で解析を行うと，ある一定の値に収束することから，本研究ではこの解を正解値に近い値と考え，考察を行う。

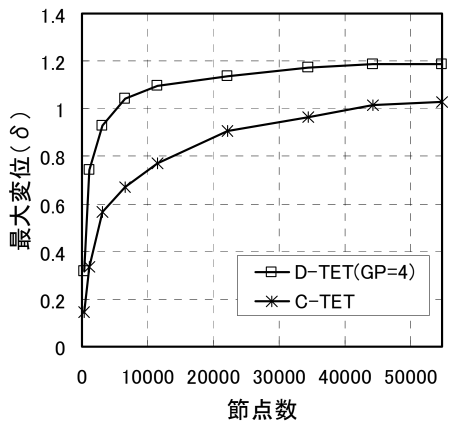
図-9に示す主応力分布は節点数が最も多い時の解である。同図で，白色に近い部分が引張応力の高い所で，最大引張応力はA点付近で3.6N/mm^{2}となっている。また，A～D，C～D上に沿って高い引張応力が発生しており，応力分布は複雑になっている。本構造物のコンクリートの設計基準強度は21.0N/mm^{2}となっており，隅角部に生じる複雑な引張応力が**図-7**のひび割れの原因となっていると考えられる。

本研究では，この構造物のひび割れの原因と考えられる引張応力を低減させるために，**図-10**(b)に示すように，隅角部の2つの擁壁が結合している個所から，目地部までの長さをそれぞれ 1/2 の長さでモデル化し，解析を行った。**図-11** に示すように，本モデルの最大変位は，1.2mm 程度，最大主応力は 1.9N/mm^2 程度で収束しており，既設貯水池の結果に対し，50%程度の低減化を図ることができている。よって，土圧による擁壁への負担は，隅角部擁壁長を短くすることにより軽減することができるとわかった。なお，本結論は実際に貯水池の再設計の際に活かされ，実際の設計計算においても隅角部から目地までの長さを既存の 1/2 として設計された。

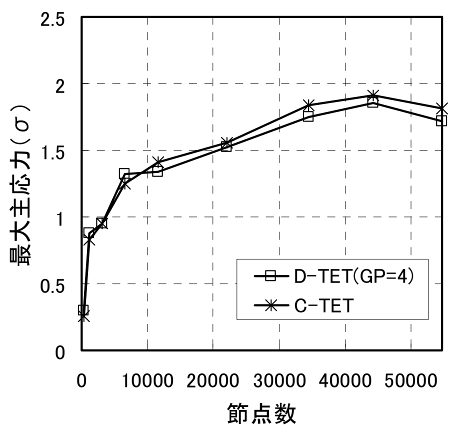


（b）解析領域断面図　（c）解析領域平面図

図-10　解析モデル（単位：mm）



（a）　節点-最大変位関係



（b）　節点-最大主応力関係

図-11　壁面長さを1/2にした場合の解

5.　まとめ

本研究では，筆者らが提案した回転自由度を有する四面体要素を定式化し，その精度的特長を述べ，沖縄県にあるコンクリート製農業用貯水池の応力解析を行い，D-TETのコンクリート解析への有効性を示した。本研究で得られた成果をまとめると以下のようになる。

(1) D-TETを用いることにより，高精度なコンクリート構造物の解析を行うことができる。

(2) 理論値の計算が困難な構造物の計算に対して，D-TETの利用で理論値を推測できる。

(3) 本解析結果が実際の貯水池の再設計に活かされた。

参考文献

1) 矢川 元基，細川 孝之：フリーメッシュ法（一種のメッシュレス法）の三次元問題への適用，日本機械学会論文集（A編），Vol.63, 614, 1997.

2) 松原 仁，富山 潤，伊良波 繁雄，矢川 元基：フリーメッシュ法を用いたコンクリートの混合モード破壊解析，日本コンクリート工学年次論文報告集，CD-ROM，2002.

3) 山城 建樹，伊良波 繁雄，富山 潤，松原 仁，矢川元基：3次元フリーメッシュ法によるコンクリートのひび割れ解析に関する研究，土木学会第 57 回年次学術講演概要集，CD-ROM，2002.

4) 安和 守史，伊良波 繁雄，富山 潤，矢川 元基：改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究，日本コンクリート工学年次論文報告集，Vol.23, No.3, 2001.

5) 富山 潤，山田 義智，伊良波 繁雄，矢川 元基：フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの粘塑性流動解析，日本コンクリート工学年次論文報告集，CD-ROM，2002.

6) 伊良波 繁雄，松原 仁，富山 潤，矢川 元基：高精度3次元要素を用いたフリーメッシュ法，平成 14 年度土木学会西部支部研究発表会，CD-ROM，2003.

7) 鷲津 久一郎他：有限要素法ハンドブック，培風館，1992.

8) O.C.ツェンキーヴィッツ：マトリックス有限要素法，培風館，1975.

9) S.チモシェンコ：材料力学，東京図書株式会社，1968

10) 関谷壮，斉藤渥：薄板構造力学，共立出版，1968