

論文 たわみ性法によるフレーム構造解析

Chhunhong CHEA*1・中野 友裕*1・木全 博聖*2・田辺 忠顕*3

要旨: 本研究は、たわみ性法を用いて鉄筋コンクリート(RC)構造物の解析を行うものである。たわみ性法を用いることにより、荷重点が格点のみのような場合には、剛性法と比べ自由度を大幅に低減することができる。さらに、要素内の厳密な力の釣合を基礎としているので、収斂性の良い安定した解を得られることが期待できる。本研究ではまず、軸変形と曲げ及びせん断変形を考慮したはりの定式化を行う。次にRCフレームとRC柱の荷重-変位関係を実験値と比較することにより、RC構造解析に対する本手法の妥当性と適用可能性を評価する。

キーワード: たわみ性法、剛性法、モーメントの直線分布、ファイバーモデル

1.はじめに

本研究で提案するたわみ性法と一般的に用いられる剛性法との違いは、剛性法がはり要素内の変形の近似関数をあらかじめ与えるのに対し、たわみ性法は要素内のモーメント分布の直線性を規定するところにある。たわみ性法は剛性法に比べて非線形解析の手法が多少複雑になるものの、荷重が格点のみに作用するような場合には精度を損ねる事なく極端に要素分割を少なくすることができるため、自由度を大幅に削減する事ができる。例えば、先端に集中荷重の作用する片持ちばりは1要素で解析が可能である。また、変位関数を仮定せず、応力分布を仮定するので、はり、柱に対しては厳密な力の釣合を基礎にしていることになり、収斂が容易になり安定した解を得られる可能性がある。たわみ性法はパークレーの研究グループ¹⁾により提案されている手法であるが、せん断変形の考慮することやたわみ性マトリクスそのものの導出が本研究の特徴である。

本研究ではまず、たわみ性法に基づいた、軸変形ならびに曲げ・せん断変形を考慮した2次

元6自由度の矩形はりの有限要素への定式化を行う。次に、その理論に基づいた数値解析を行い、RCフレームとRC柱の解析によって、本手法の妥当性と可能性を示す。

2.たわみ性法によるはりの定式化

2.1 たわみ性法と剛性法の比較

はりの有限要素解析には剛性法が用いられるのが一般的である。ここで剛性法とは、部材端の荷重を変位の関数で表す型式のものを指している。

$$\{P\} = [K]\{\mu\} \quad (1)$$

ここで $\{P\}$ は節点荷重ベクトル、 $\{\mu\}$ は変位ベクトル、そして $[K]$ は剛性マトリクスである。それに対し、部材端の変位を荷重の関数で表す型式をたわみ性法という。

$$\{\mu\} = [F]\{P\} \quad (2)$$

$[F]$ はたわみ性マトリクスである。

剛性法における荷重と変位の関係式(すなわち剛性マトリクス)は要素の支持条件によらな

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻助手 工修 (正会員)

*3 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻教授 工博 (正会員)

いが、たわみ性法における関係式（たわみ性マトリクス）は、安定に支持された要素に対してのみ作ることができる。

本研究に示すたわみ性法では、ある静定基本形のたわみ性マトリクスと座標変換マトリクスから剛性マトリクスを求める。よってこれは完全なたわみ性法ではなく、剛性法-たわみ性法混合手法とも考えられる。しかしながら、剛性法との違いを明確にするために、ここではたわみ性法(Flexibility 法)と表現することにした。

2.2 たわみ性マトリクスの導出

2次元6自由度の矩形はりを考える。図-1に示すような剛体運動を考慮したはりの運動（剛体モード）における荷重及び変位ベクトル $\{\bar{Q}\}$, $\{\bar{q}\}$ は次のように表すことができる。

$$\{\bar{Q}\} = [N_1 \ V_1 \ M_1 \ N_2 \ V_2 \ M_2]^T \quad (3)$$

$$\{\bar{q}\} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T \quad (4)$$

ここで、 N, V, M はそれぞれの節点に作用する軸力、せん断力、曲げモーメントを表している。また、 u, v, θ は x 方向変位、 y 方向変位、たわみ角を表している。次に、図-2に示すような剛体運動を考慮しない場合（非剛体モード）の荷重及び変位ベクトル $\{Q\}$, $\{q\}$ について考える。 x, y は要素座標系を、 X, Y は全体座標系を表している。軸 x は断面の中立軸である。非剛体モードの場合、自由度は三つに削減される。 u_2 は節点の軸方向変位、 θ_1, θ_2 は回転方向変位を表している。また、 N_2 は節点に作用する軸力、 M_1, M_2 は節点の曲げモーメントを表している。

$$\{Q\} = [N_2 \ M_1 \ M_2]^T \quad (5)$$

$$\{q\} = [u_2 \ \theta_1 \ \theta_2]^T \quad (6)$$

図-2 中の $N(x)$, $S(x)$, $M(x)$ はそれぞれ任意点 x の断面に作用する軸応力、せん断応力、曲げモーメントであり、 $\varepsilon(x)$, $\gamma(x)$, $\phi(x)$ は

それぞれ x 方向の軸ひずみ、せん断ひずみ、曲率を表している。

任意の断面に作用する力を $\{D(x)\}$ 、断面内の変形を $\{d(x)\}$ とすると、次のようになる。

$$\{D(x)\} = [N(x) \ S(x) \ M(x)]^T \quad (7)$$

$$\{d(x)\} = [\varepsilon(x) \ \gamma(x) \ \phi(x)]^T \quad (8)$$

また、剛体モードの荷重及び変位ベクトル $\{\bar{Q}\}$, $\{\bar{q}\}$ と非剛体モードのベクトル $\{Q\}$, $\{q\}$ は、次のような線形関係を有する。

$$\{\bar{Q}\} = [t] \{Q\} \quad (9)$$

$$\{\bar{q}\} = [t]^T \{q\} \quad (10)$$

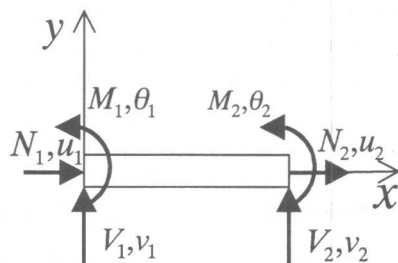


図-1 剛体モード

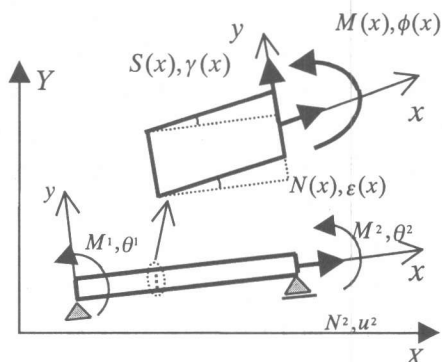


図-2 非剛体モード

ここで、 $[t]$ は変換マトリクスを表している。
 任意の断面に作用する荷重および変位増分は
 節点変位増分および荷重増分で表すことができる。

$$\{\Delta d(x)\} = [a(x)]\{\Delta q\} \quad (11)$$

$$\{\Delta D(x)\} = [b(x)]\{\Delta Q\} \quad (12)$$

ここで、 $[a(x)]$ と $[b(x)]$ は補間関数である、
 力の補間関数 $[b(x)]$ は力の直線分布から求めら
 れる。例えばモーメントの場合の補間関数
 $[b(x)]$ は図-3より次のようになる。

$$M(x) = \left[\left(\frac{x}{l} - 1 \right) \quad \frac{x}{l} \right] \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$[b_m(x)] = \left[\left(\frac{x}{l} - 1 \right) \quad \frac{x}{l} \right] \quad (14)$$

また任意の断面における荷重・変位関係は定
 数 $f(x)$ を用いて次のように表せる。

$$\{\Delta d(x)\} = [f(x)]\{\Delta D(x)\} \quad (15)$$

ここで $[f(x)]$ は断面剛性を表している。軸変
 形および曲げ変形に関する剛性は、ファイバ
 モデルより求める。この手法は、はりの微小要
 素に分割し、各微小要素の剛性の和をはり要素
 の剛性として計算する方法である。また、せん
 断剛性はトラス理論から求めることができる。

Galerkin 法を用いて離散化すると次の式に
 なる。

$$\int_0^L \{\delta D(x)\}^T [\{\Delta d(x)\} - [f(x)]\{\Delta D(x)\}] dx = 0 \quad (16)$$

また、節点力 $\{P\}$ が作用し、内力
 $\{D(x) + \Delta D(x)\}$ と釣り合っている時、仮想変
 位の原理により次の式が得られる。

$$\int_0^L \{\delta d(x)\}^T [\{D(x)\} + \{\Delta D(x)\}] dx = [\delta q]^T \{P\} \quad (17)$$

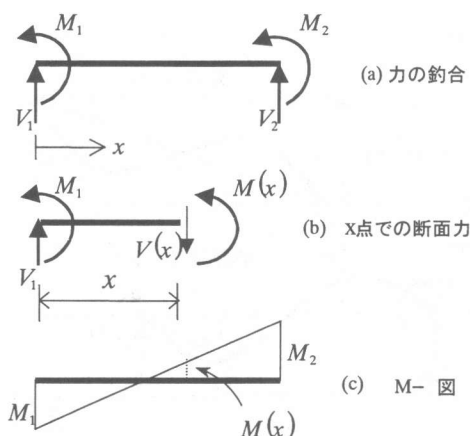


図-3 モーメントの直線分布

式(16)と式(17)を解くと、最終的に次のよう
 な式が得られる²⁾。

$$[F]^{-1}\{\Delta q\} = \{P\} - \{Q\} \quad (18)$$

式(18)において、 $\{P\} - \{Q\}$ は荷重増分と $\{\Delta q\}$
 変位増分の関係を表している。ここで $[F]$ はた
 わみ性マトリクスであり、次のように表せる。

$$[F] = \int_0^L [b(x)]^T [f(x)] [b(x)] dx \quad (19)$$

曲げ、せん断、軸方向に関するたわみ性マト
 リクスは独立に得られる。

2.3 剛性マトリクスの導出

非剛体モードと剛体モードの変形状態を図-4
 に模式的に表す。非剛体モードのたわみ角 θ_1^* 、
 θ_2^* は次のように表せる。

$$\theta_1^* = \theta_{v1} + \theta_{m1} \quad (20)$$

$$\theta_2^* = \theta_{v2} + \theta_{m2} \quad (21)$$

ここで、 $\theta_{v1}, \theta_{v2}, \theta_{m1}, \theta_{m2}$ は節点1, 2における
 せん断力と曲げモーメントによるたわ
 み角である。

剛体モードのたわみ角 θ_{i1}, θ_{i2} は、非剛体モー
 ドにおけるたわみ角 θ_1^*, θ_2^* および節点の剛体
 変位 v_1, v_2 を用いて次のように表せる。

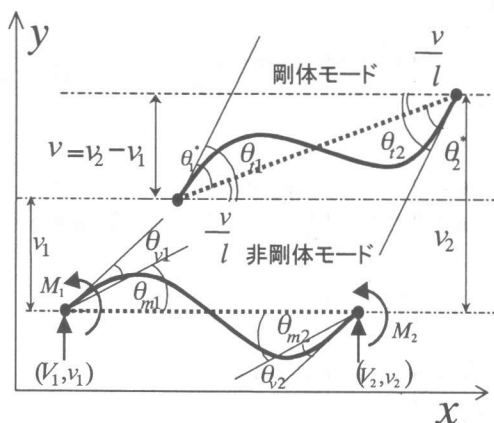


図-4 剛体モードと非剛体モード

$$\theta_{v1} + \theta_{m1} = \theta_{t1} - \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (22)$$

$$\theta_{v2} + \theta_{m2} = \theta_{t2} - \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (23)$$

式(20)と式(21)をまとめると、剛体—非剛体モードの変位関係と荷重関係が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{v1} + \theta_{m1} \\ \theta_{v2} + \theta_{m2} \end{Bmatrix} = t^T \begin{Bmatrix} \theta_{t1} \\ \theta_{t2} \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここは t が変換マトリクスであり、次のように表せる。

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 1 & 1/l & -1/l \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

非剛体モードの場合、 θ_{m1}, θ_{m2} と M_1, M_2 の関係はたわみ性マトリクス $[F_m]$ を用いて式(27)のように表される。また、 θ_{v1}, θ_{v2} と M_1, M_2 の関係はたわみ性マトリクス $[F_s]$ を用いて式(28)のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{m1} \\ \theta_{m2} \end{Bmatrix} = [F_m] \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{v1} \\ \theta_{v2} \end{Bmatrix} = [F_s] \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここで $[F_s]$ はせん断変形に関するたわみ性マトリクスであり、せん断変形を考慮した要素剛性マトリクスは次に得られる。

式(21)～(28)を用いて解くと、要素剛性マトリクスを次のように得られる。

$$[K] = [t]^T [F_m]^{-1} [I] + [F_s] [F_m]^{-1} [I] \quad (29)$$

3. 材料の特性

RCはりのモーメント・曲率関係および断面剛性を求めるために、ファイバーモデル³⁾を用いて、要素断面を分割し、繰り返し計算を行う。本研究ではコンクリートの構成則は図-5示すようなSaenzの提案式を用い、鉄筋の構成則は図-6に示すようなパイリニア型の式を用いる。

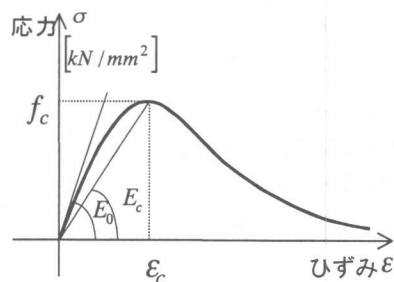


図-5 コンクリートの構成則

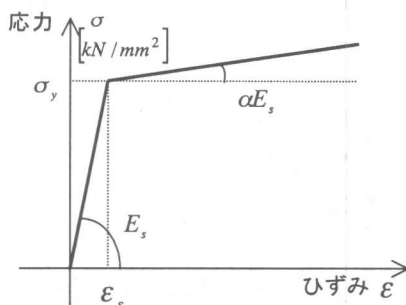


図-6 鉄筋の構成則

4. RC フレーム構造物の解析

曲げ破壊を生じる RC フレーム実験⁴⁾の解析を行った。図-7 に実験供試体と柱の断面を、図-8 に供試体の解析モデルを示す。供試体には軸方向鉄筋が D16×6 本、φ9 のスターラップが 100mm 間隔で配筋されている。コンクリートの圧縮強度は 28 日で 26.5[MPa]である。2 本の柱の頭部に一定の軸方向圧縮力が与えられた状態で、水平方向に加力される。図-8 に解析モデルを示すが、このような鉄筋コンクリートフレームの場合でも、たわみ性法では 3 要素 4 節点（そのうち 2 節点は埋め込み端の境界節点である）で解析が可能である。

解析の際、用いられた材料パラメータはコンクリートの圧縮強度が $f_c = 26.5[\text{MPa}]$ 、降伏ひずみは 0.002 である。また鉄筋の圧縮強度は降伏応力 $f_y = 400[\text{MPa}]$ であり、降伏ひずみは 0.0025 である。

図-9 は左上端の載荷点における荷重-変位関係の解析結果と実験値を示している。図中、点線はせん断変形を考慮していない解析結果であり、実線はせん断変形を考慮した解析結果である。2 つの解析結果に大きな違いは見られず、ともに実験値を精度良く捉えている。このような結果から、たわみ性法によるはりの有限要素解析はフレーム解析において有効な手段であることを確認できた。2 つの解析結果の違いがみられないのはこのフレームの変形が曲げ卓越であるためだと考えられる。せん断変形が卓越するケースを考えるために、次の柱の解析を行なった。

5. RC 柱の解析

次に、せん断破壊を生じる RC はりの解析を行った。図-10 に実験供試体と供試体の解析モデルを示す⁵⁾。供試体には軸方向鉄筋が D19×12 本、φ6.35 のスターラップが 300mm 間隔で配筋されている。柱の頭部に一定の軸方向圧縮力が与えられた状態で、水平方向に加力される。

せん断変形を考慮する際、せん断剛性をどの

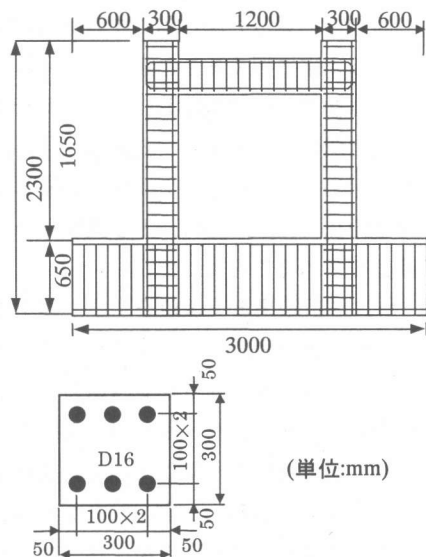


図-7 実験供試体と柱の断面

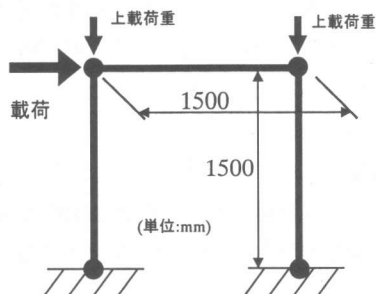


図-8 解析モデル

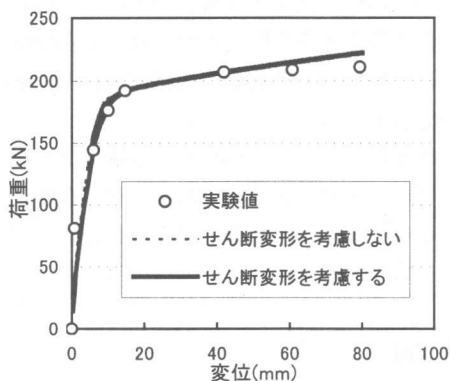


図-9 RC フレームの解析結果

ように求めるかが重要なポイントとなる。当然、構造物はせん断補強筋の有無によってせん断耐荷機構が大きく変化するが、それぞれの場合で

のせん断剛性の算定方法が確立すれば構造物の挙動をより正確に捉えることができる。本研究においては初期弾性状態においてはせん断補強筋の有無に関わらずポアソン効果から求め、ひび割れ発生後（コンクリート断面引張縁のひずみが 0.00015 に達した時）、トラス理論からせん断剛性を求めることにした。

図・11 に解析結果と実験値を示す。図中の細線はせん断変形を考慮していない場合の解析結果であり、太線はせん断変形を考慮している場合の解析結果である。せん断変形を考慮しない場合の解析結果は初期段階において実験値より高い剛性を示している。一方、せん断変形を考慮することにより、実験値を精度良く捉えることができた。

今回はせん断剛性の評価にトラス理論を用いたが、今後さらに精度の良い解を得るためには、より厳密な方法によってせん断剛性を検討する必要があると考える。

6. 結論

- 1.たわみ性法を用いると、複雑な RC フレーム構造物の挙動も、少ない要素数で精度良く表現することが可能である。
- 2.今回は単調載荷の解析を行ったが、繰り返しの複雑な荷重・変形を受ける RC 構造解析にその適用を広げるためには、せん断剛性および座屈した鉄筋の構成則についての検討が必要である。
- 3.たわみ性法と剛性法の収斂性や解析速度についての比較検討が必要である。特に塑性ヒンジが発生するような構造物の解析の際の収斂性に着目する必要がある。

参考文献

- 1)E.Spacone, V.Ciampi and F.C.Filippou: Mixed Formulation of Nonlinear Beam Finite Element Computers and Structures, pp.71-83, Vol.58, No.1, 1996
- 2)O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor :Basic formulation and linear problems, The Finite Element

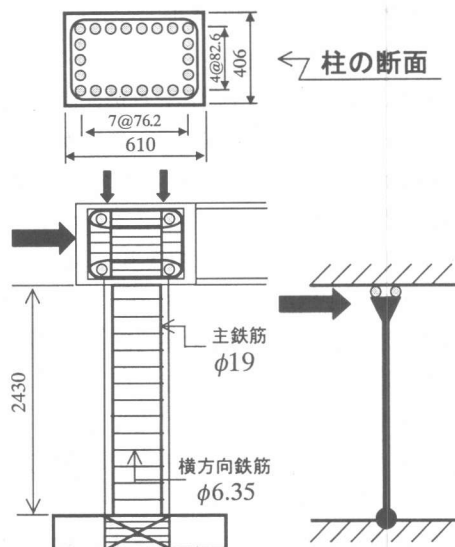


図-10 実験供試体と解析モデル

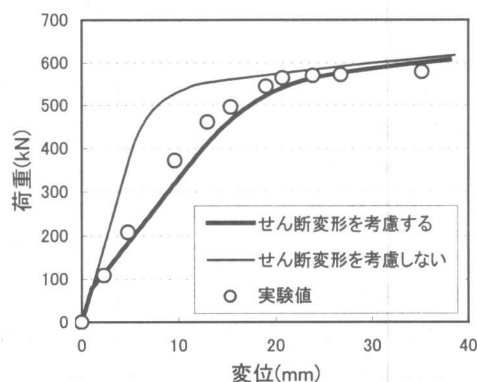


図-11 RC 柱の解析結果

Method, Vol.1, 4th Edn. McGraw-Hill, London, 1989

- 3)田辺忠顕, 檜貝勇, 梅原秀哲, 二羽淳一郎: コンクリート構造, 朝倉書店, pp47~79, 1985
- 4)藤掛一典, 大野友則, 西岡隆: 鉄筋コンクリートラメンのエネルギー吸収容量に関する実験的研究, 土木学会論文集第 390 号, V-8, pp.113-121, 1982
- 5)Yan Xiao, M.J. Nigel Priestley, Frieder Seible: Steel Jacket Retrofit for Enhancing Shear Strength of Short Rectangular Reinforced Concrete Columns, Uni. of California, San Diego, Structural Systems Research Project, Report No. SSRP-92/07, 1993