

論文 ひずみの局所化領域を含むコンクリートの有限要素解析

松尾真紀^{*1}・恩田雅也^{*2}・二羽淳一郎^{*3}

要旨: コンクリートの破壊メカニズムは複雑であり、その破壊進展機構については不明な点も多い。コンクリートが破壊に至る場合、破壊進行領域のみにひずみが集中し、他の部分は弾性的にひずみが回復するという、いわゆるひずみの局所化現象を示す。本研究では、引張力作用下における無筋コンクリートの2次元有限要素解析を行う。一要素内にひずみの不連続部分を有し、引張軟化特性を導入したひずみの局所化領域が埋め込まれた分布ひび割れモデルを提案する。ひずみの局所化領域の幅、局所化領域の位置、要素分割数をパラメータとし、それぞれの変化が解析結果に及ぼす影響について検討を行う。

キーワード: ひずみの局所化、分布ひび割れモデル、引張軟化特性、有限要素法

1. はじめに

コンクリートは骨材、セメント、水などの性質の異なった材料からなる複合材料であり、極めて非均質な材料である。作用する応力状態によって、あるいは部材の寸法や形状などによっても力学的挙動が変化し、コンクリートの破壊メカニズムは複雑なものとなる。コンクリートに引張応力が作用する場合、ある部分にひずみが局所化し、マイクロクラックが累積した破壊進行領域が形成される。この領域は引張ひずみが増加するにつれて伝達応力が減少するような引張軟化特性を示し、最終的には部材全体の破壊を左右するような大きなひび割れへと発展する場合もある。

コンクリート構造の解析手法の一つとして有限要素法が広く用いられている。一般的に有限要素法では要素内の応力場、ひずみ場は連続として取り扱う。しかし、コンクリートに発生するひび割れのようにひずみが局所化し、ひずみ場の不連続面が形成されるような場合、ひび割れのモデル化が重要な問題となる。現在では主として二種類のモデル、すなわち、より現実の

ひび割れに近い表現方法である離散ひび割れモデルと分布ひび割れモデルが用いられている。分布ひび割れモデルは間接的なひび割れの表現方法であり、ひび割れ発生後もコンクリートは連続体としての一体性を保つため、幾何学的な制約を受けずに破壊を追求することができる。しかし、要素全体の特性を変化させるため、解析結果が要素寸法に大きく左右される。

有限要素法によるコンクリートのひずみの局所化解析はこれまでも様々な研究者によって試みられてきた^{1), 2)}。局所化解析とは、ひずみが局所化する領域(局所化領域)とそれ以外の領域(非局所化領域)を有する要素を用いて、コンクリートに発生するひび割れの進展を表現して進めていくものである。この解析手法は一種の分布ひび割れモデルを適用したものであるため、要素の再分割を行わずにひび割れの進展を解析することができる。しかし、これまでの研究で提案されている定式化は、局所化領域と非局所化領域のひずみを関連づける係数や局所化領域の範囲など、未だ明らかにされていない点も多く、ひずみの局所化の定義も複雑である。

*1 東京工業大学助手 工学部土木工学科 工修(正会員)

*2 東京工業大学大学院 理工学研究科土木工学専攻(正会員)

*3 東京工業大学教授 工学部土木工学科 工博(正会員)

そこで本研究では、非常に単純な形式でひずみの局所化領域を含む有限要素の定義を行い、一要素内にひずみの局所化領域を埋め込んだ分布ひび割れモデルを提案する。また、コンクリートの一軸引張試験の解析において、ひずみの局所化領域に引張軟化特性を導入し、ひずみの局所化領域の幅、位置、要素の大きさの変化が解析結果に与える影響について検討を行う。

2. コンクリートの局所化解析

2.1 局所化領域を含む要素のモデル化

図-1 (a), (b) にひずみの局所化の概念図とひずみ分布を示す。有限要素法では、形状関数によって節点変位と要素内ひずみが結びつけられているため、図-1 に示すような一要素内にひずみの不連続領域を含む要素を表現することは一般には困難である。そこで、一要素がひずみの局所化領域と非局所化領域、2つのひずみの重ね合わせであると仮定し、ひずみの局所化領域を含む要素の定式化を行った。なお、要素はすべて1次アイソパラメトリック四辺形要素とした。

図-2 にひずみの局所化領域を含む要素を示す。局所化領域は、最大主引張応力がコンクリートの引張強度に達した点を含み、その主引張応力方向に対して直角に、ある幅 b を持たせて、要素内に挿入する。

局所化領域、非局所化領域のひずみと応力を次のように定義する。 N は非局所化領域 (Non-Localized Region) を表し、 L は局所化領域 (Localized Region) を表す添字である。

$$\varepsilon_N = B_N(u - u_L) \quad (1)$$

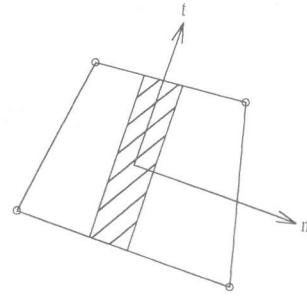
$$\varepsilon_L = B_L u_L \quad (2)$$

$$\sigma_N = D_N \varepsilon_N = D_N B_N(u - u_L) \quad (3)$$

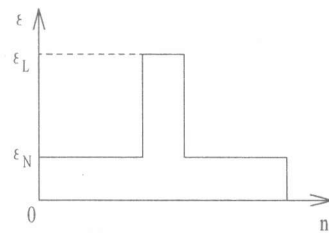
$$\sigma_L = D_L \varepsilon_L = D_L B_L u_L \quad (4)$$

ここで、 u は節点変位である。

引張軟化特性の導入を容易にするため、局所化領域の変位 u_L と要素の節点変位 u の差が非局所化領域の変位であるとし、ひずみ ε_N を算



(a) 概念図



(b) ひずみ分布

図-1 ひずみの局所化

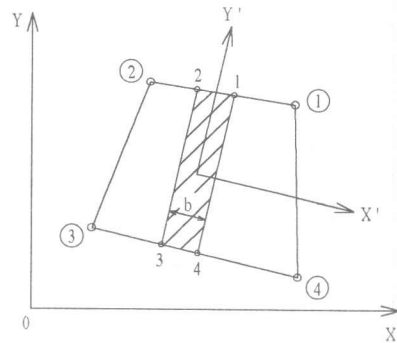


図-2 局所化領域を含む要素

出することとした。また、局所化領域の B_L マトリクスは、弾性解析において最大主引張応力発生点の位置とその方向が求められることから、幅 b が決定すれば B_N と同様にして求めることができる。したがって、実際の解析では局所化領域と要素の境界線との交点 (図-2 中の点 1 ~ 4) の座標を求める必要がある。これ以後、

局所化領域を決定するために必要となるこれらの交点を仮想節点と呼ぶこととし、現実の要素の節点とは区別する。

次に式(1)から式(4)をマトリクス表示にすると、以下ようになる。

$$\{\varepsilon_N\} = [B_N \quad -B_N][u \quad u_L]^T \quad (5)$$

$$\{\varepsilon_L\} = [0 \quad B_L][u \quad u_L]^T \quad (6)$$

$$\{\sigma_N\} = D_N[B_N \quad -B_N][u \quad u_L]^T \quad (7)$$

$$\{\sigma_L\} = D_L[0 \quad B_L][u \quad u_L]^T \quad (8)$$

要素節点に与える仮想変位を δu とすると、仮想仕事の原理から、次の関係「節点力 f のなす仕事（外部仕事）＝内部仕事」を表す式は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} \delta u & \delta u_L \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} f \\ 0 \end{matrix} \right\} \\ &= \int_{V_N} \{\delta \varepsilon_N\}^T \{\sigma_N\} dV_N + \int_{V_L} \{\delta \varepsilon_L\}^T \{\sigma_L\} dV_L \\ &= [\delta u \quad \delta u_L] \int_{V_N} [B_N \quad -B_N]^T D_N [B_N \quad -B_N] du [u \quad u_L]^T \\ & \quad + [\delta u \quad \delta u_L] \int_{V_L} [0 \quad B_L]^T D_L [0 \quad B_L] du [u \quad u_L]^T \end{aligned} \quad (9)$$

このように、節点に仮想変位 δu を与えた場合、局所化領域を表す仮想節点にも δu_L の変位が生じる。しかし、仮想仕事の原理では節点のみに外力が作用すると考えるため、ここで仮に設けた仮想節点に外力は働かない。したがって、式(9)の左辺において、仮想節点に作用する外力の項は0としている。

式(9)をさらに展開すると、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{matrix} f \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_L \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$K_{11} = \int_{V_N} B_N^T D_N B_N dV_N$$

$$K_{12} = - \int_{V_N} B_N^T D_N B_N dV_N$$

$$K_{21} = - \int_{V_N} B_N^T D_N B_N dV_N$$

$$K_{22} = \int_{V_N} B_N^T D_N B_N dV_N + \int_{V_L} B_L^T D_L B_L dV_L$$

式(10)から仮想節点の節点変位は以下のよう
に示される。

$$u_L = -K_{22}^{-1} K_{21} u \quad (11)$$

さらに、式(11)を式(10)に代入すると以下の式が得られる。

$$f = [K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}] u = K \cdot u \quad (12)$$

(1) 剛性マトリクス

式(10)から、剛性マトリクス K は局所化、非局所化領域のそれぞれの範囲で積分する式になっていることがわかる。局所化領域の積分は仮想節点で囲まれた四辺形の積分となるため、仮想節点の座標が既知であれば容易に計算される。しかし、非局所化領域の積分は局所化領域の導入位置や方向に大きく左右される。

そこで、非局所化領域の範囲を以下のように仮定した。図-2 に示す要素の節点①～④の座標をそれぞれ $(x_1, y_1) \sim (x_4, y_4)$ とし、局所化領域の幅を b とする。

$$x'_1, x'_4 = x_1, x_4 - \frac{b}{2}, x'_2, x'_3 = x_2, x_3 + \frac{b}{2} \quad (13)$$

式(13)から求められた座標 $(x'_1, y_1) \sim (x'_4, y_4)$ で囲まれた範囲を非局所化領域として、剛性マトリクス K の積分を行った。本研究ではコンクリートの直接引張試験について、有限要素解析を行っている。そのため、局所化領域は X 軸方向に対して直角に挿入するので、式(13)では Y 方向の座標と最大主引張応力の角度について考慮していない。

(2) 弾性マトリクス

本研究では、ひずみの局所化領域と非局所化領域の応力-ひずみ関係を表すマトリクスに、それぞれ以下に示すものを用いている。

非局所化領域の弾性マトリクス D_N は、2次元平面応力状態において次式で表される。

$$D_N = \frac{E_N}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 E_N はヤング係数 ($=3.0 \times 10^4 (\text{N/mm}^2)$)、 ν はポアソン比 ($=0.1667$) である。ただし、非局所化領域は弾性体として取り扱うため、 E_N は定数である。

次にひずみの局所化領域の応力-ひずみマトリクス D_L を以下に示す。

$$D_L = \begin{bmatrix} E_L & 0 & 0 \\ 0 & E_N & 0 \\ 0 & 0 & G' \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 E_L はヤング係数、 G' はせん断弾性係数である。 G' は $G'=G/1000$ ($G=E_N/2(1+\nu)$) とし、定数として扱った。ただし、 D_L マトリクスは局所化領域の導入方向に対する特性であるため、全体座標系に変換している。また、 E_L には図-3 に示す引張軟化特性を導入した。本解析では、2直線モデルで折れ点の応力を引張強度の 1/4 とした 1/4 モデル³⁾を引張軟化曲線として採用した。このモデルで与えられているひび割れ幅を局所化領域幅 b で除したものをひずみとし、応力-ひずみの関係に修正した。図-3 は局所化領域幅を 10(mm)、破壊エネルギーを 100(N/m)としたときの引張軟化曲線である。

2.2 解析方法

本研究では、矩形断面を有する無筋コンクリートの直接引張試験について、有限要素解析を行う。解析対象とした解析モデルの载荷条件、拘束条件、要素分割の一例を図-4 に示す。

解析手順を以下に示す。

- (1) コンクリートを弾性体として考え、強制変位を与える。
- (2) 最大主引張応力が引張強度に達したとき、その方向に対して垂直方向に、発生点を中心とし、幅 b の局所化領域を挿入する (本解析では応力状態が一樣となるため、解析モデルスパン中央あるいは少しずれた位置に局所化領域を挿入することにした)。

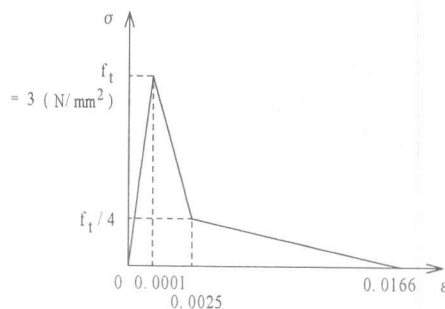


図-3 引張軟化曲線

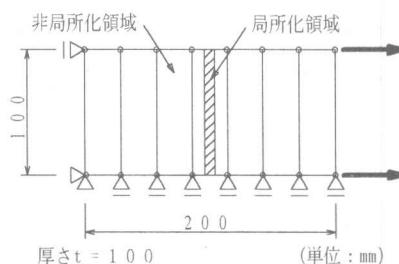


図-4 解析モデル

(3) 局所化領域内の E_L を変化させ、応力とひずみが図-3 に示した引張軟化曲線と一致するように収束計算を行う。

(4) 収束したことが確認されたら、さらに強制変位を与える。

これらのステップを繰り返して、解析を進めた。

2.3 解析結果および考察

(1) 荷重-変位の関係とひずみ分布

図-4 に示した解析モデルのスパン中央に幅 $b=10(\text{mm})$ の局所化領域を挿入し、解析を行った。解析結果を図-5、図-6 に示す。

図-5 に解析モデル端部の荷重と変位の関係を示す。コンクリート内の最大主引張応力が引張強度に到達後、ひずみの局所化領域を挿入することによって、荷重と変位が徐々に低下する引張軟化現象を示していることがわかる。本研究では、一軸引張試験を対象として解析を行っているため、図-5 の結果は E_L に導入した引張

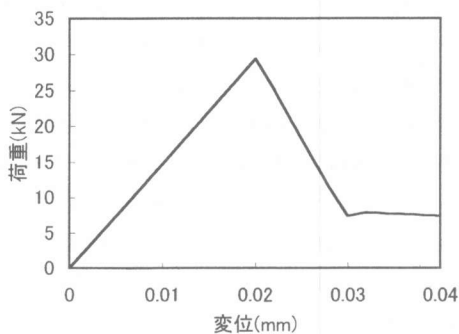


図-5 荷重と変位の関係

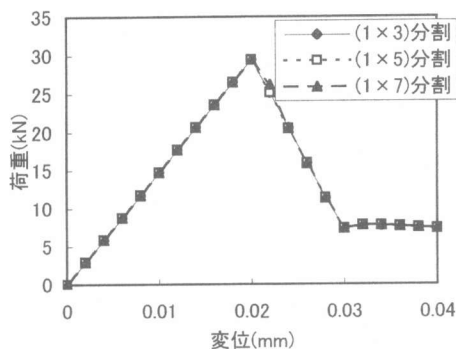


図-7 荷重と変位の関係

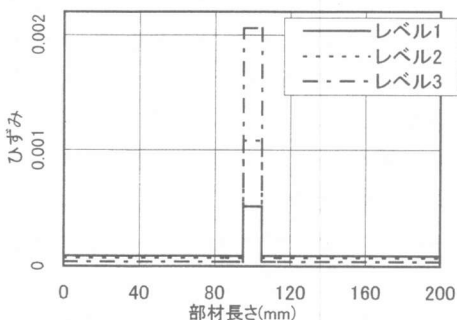


図-6 ひずみ分布

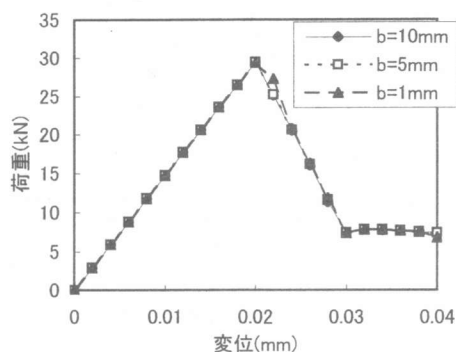


図-8 荷重と変位の関係

軟化曲線を直接反映した結果となっている。

図-6 に、軸方向に対して直角な断面の中央部における、荷重レベルごと（レベル1から3に向かって徐々に軟化）の軸方向のひずみ分布を示す。軟化にともなう荷重レベルの減少に応じて、局所化領域ではひずみが急激に増大するが、非局所化領域では徐々にひずみが減少していく結果となった。また、局所化領域を含む要素の非局所化領域のひずみ分布については、局所化領域を含まない要素のひずみ分布とのばらつきがほとんど観察されなかった。このことから、式(13)に示した方法で、局所化領域を含む要素の剛性マトリクス K をうまく表現できていることを確認することができた。図-6 に示す結果から、今回提案した分布ひび割れモデルを適用することにより、ひずみが局所化領域のみ卓越することが確認された。

(2) 要素寸法による影響

寸法は図-4 に示したモデルと同じで、要素分割数を変化させた解析モデルについて、解析を行った。凡例に示す分割数は（縦方向分割数×横方向分割数）を表している。なお、スパン中央に挿入する局所化領域の幅はすべて $b=10(\text{mm})$ とした。解析結果を図-7 に示す。

図-7 から明らかなように、すべての荷重－変位関係が同様の傾向を示し、ほぼ一致している。局所化領域を含んだ要素を用いた有限要素解析において、メッシュ依存性は軽減するが、要素内の局所化領域と非局所化領域の割合が解析結果に影響を与えるという報告がある^{1), 2)}。本解析では、応力状態が一樣で、かつ解析条件も非常に単純であるため、メッシュ依存性あまり見られなかったという可能性もあるが、要素寸法の相違、局所化領域と非局所化領域の割

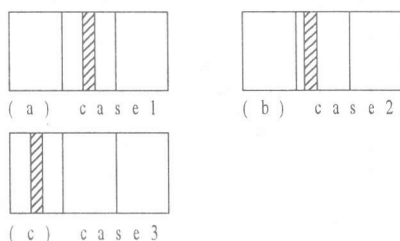


図-9 解析ケース

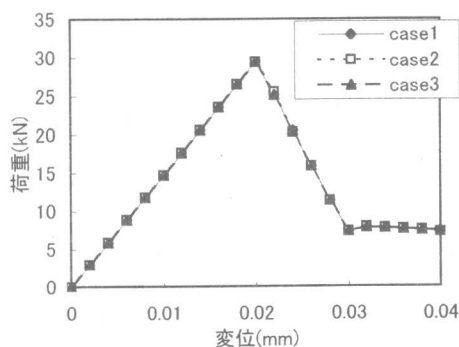


図-10 荷重と変位の関係

合が解析結果に与える影響は小さいものと考えられる。

(3) 局所化領域幅による影響

局所化領域の幅 b が 1, 5, 10(mm)の場合について解析を行った。その他の条件、解析モデルの寸法、要素分割数、局所化領域の挿入位置はすべて同じである。図-8 にそれぞれの解析から得られた荷重-変位関係をあわせて表示している。

局所化領域の幅を変化させても、荷重-変位関係はほぼ同じ結果となった。2.3(2)で得られた結果と同様に、局所化領域と非局所化領域の割合が解析結果に与える影響はあまり観察されなかった。

(4) 局所化領域の位置による影響

実際にコンクリートの直接引張試験を行うと、材料の欠陥のある脆弱部分にマイクロクラックが集中し、破壊に至る。このような場合を考え、

局所化領域をスパン中央の要素の中央部(case1)、スパン中央の要素の偏心部(case2)、スパン中央でない要素の中央部(case3)の3カ所に移動させて、解析を行った。解析ケースを図-9に示す。

図-10に荷重と変位の関係を示す。局所化領域の位置を変化させても、あまり大きな違いは見られない。したがって、局所化領域の位置の違いも、解析結果に及ぼす影響は極めて小さいと考えられる。

3. まとめ

本研究から得られた結論を以下にまとめる。

- (1) コンクリートに生じるひずみの局所化を表現することのできる、有限要素の定式化を行い、ひずみの局所化領域を含む、分布ひび割れモデルを提案した。
- (2) 本研究で提案した分布ひび割れモデルを適用した有限要素解析によって、コンクリートのひずみの局所化現象、引張軟化特性を表現することができた。
- (3) 本研究で提案した手法により、有限要素解析でしばしば問題となるメッシュ依存性を軽減することができる。

参考文献

- 1) Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A.: A Finite Element Method for Localized Failure Analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No.61, pp.189-214, 1987
- 2) Belytschko, T., Fish, J. and Engelman, B. E.: A Finite Element with Embedded Localization Zones, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No.70, pp.59-89, 1988
- 3) Rokugo, K., Iwasa, M., Suzuki, T. and Koyanagi, W.: Testing Methods to Determine Tensile Strain Softening Curve and Fracture Energy of Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy, Balkema, pp.153-163, 1989