

論文 マルコフモデルによるコンクリート引張クラックのランダム成長に関する研究

金沢勝治*¹・呉智深*²・Yunping Xi*³

要旨: 脆性材料において応力の増加に伴うクラック進展過程はランダムな要素を含み定量的に評価することは難しく、その挙動のばらつきは確率的に表現されることが望ましい。このことから脆性材料としてのコンクリートに関してマルコフモデルによるコンクリート内部の引張クラックのランダム成長に関するモデルを定式化し、切り欠きを有するコンクリート3点曲げ部材への適用を試みた。また寸法効果による確率的クラック進展挙動の変化を検討した。

キーワード: クラック進展過程, マルコフ理論, 破壊力学, Rカーブモデル

1. はじめに

脆性材料は応力の増加に伴い、徐々にクラックを進展させ、ある限界応力に達すると急激にクラックが進展し破壊する。この現象はよく線形か、非線形破壊力学理論によって表現される。しかし実際のクラック進展はランダムな要素を含み、応力状態や材料定数だけでは片づけることができない。そのため Xi¹⁾らはあらかじめ実験から応力とクラック進展量の関係を求め、それを利用してマルコフ理論を用いて個々の応力状態によるクラック進展量を確率的に表現する手法の提案を行った。この手法は応力の増加によってクラックが進展するかしないかの2通りのみ考慮し、また進展した場合のクラック進展長さはある一定の値を設定している。しかしこれではある応力状態でのクラック進展長さがそれ以外の値になる可能性を考慮していないため、確率評価は限られたものとなっている。

そのため本研究ではその理論を発展させ、ある単位応力増分で様々なクラック長さに到達するモデルを定式化し、解析を行った。また供試体寸法の違いに対するマルコフ理論の適用可能性を考察する。

2. クラック進展評価手法

2. 1 クラック進展の確率的概念の定義¹⁾

一般的な問題として、構造物の状態はある種のパラメータに従って変化するのが常である。そしてある状態から他の状態へ遷移が生ずる確率（遷移確率）は、そのパラメータの他にそれ以前のすべての段階におけるシステムの状態に依存するであろう。ところが遷移確率を現在の時点での状態のみで決定することができると仮定すると、その変化の過程をマルコフ理論でモデル化することができる。また対象物を有限な損傷レベルの状態からなると仮定した場合、これをマルコフ連鎖と呼ぶ。マルコフ理論の一般式を(1)に示す。

$$p_x = p_0 P^x \quad (1)$$

ここで、 p_x : x 回遷移後の確率、 P : 遷移確率、 x : 遷移回数、 p_0 : 解析対象物の初期状態確率を示す。そして p_0 は以下のように定義される。

$$p_0 = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_B\} \quad (2)$$

* 1 茨城大学大学院 理工学研究科都市システム工学専攻 (正会員)

* 2 茨城大学助教授 工学部都市システム工学科 (正会員)

* 3 Assistant Professor Environmental and Architectural Engineering University of Colorado

ここで、 B : 定義された損傷状態の総数、 π_j : j 状態の確率であり、すべてのマトリックスの和は 1. 0 になる. 特に初期状態で全く損傷していない場合では $\pi_1 = 1$. 0 でその他は 0 になる. (1) 式は次ステップの状態確率は現在の状態と遷移確率のみに依存し、またこのことを繰り返し考えることで次々と状態を確率評価できることを示している. つまり現在の状態と遷移確率を定義できればそれまでの過去の状態を考慮する必要がないことを示している.

では以上のことに対して具体的に考えてみる. Δx を単位応力増分、 j を構造物の任意の損傷状態と仮定する. また構造物の現在の損傷状態を次のように表わす.

$$P_{\Delta x} = \{q_{\Delta x}(1), q_{\Delta x}(2), \dots, q_{\Delta x}(B)\} \quad (3)$$

$q_{\Delta x}(j)$ は応力が Δx 増加することで損傷状態が j である確率である. そしてマルコフ理論の遷移確率行列を次のように表わす.

$$P = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \cdots & r_{1,B} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \cdots & r_{2,B} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \cdots & r_{3,B} \\ 0 & 0 & 0 & r_{B-1,B-1} & r_{B-1,B} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n r_{i,j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, B-1 \quad (5)$$

$r_{i,i}$ は単位応力増分によって i から i の状態へ、つまり損傷が進まない確率を表わす. $r_{i,j}$ は同様に i から j へ状態変化する確率である. 本研究では損傷状態をクラック長さで定義するため行列の左下はすべて 0 になる. またもし一回の応力増分によって 2 段階以上損傷が進まないと仮定すると (6) 式のように定義される.

$$P = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{B-1,B-1} & r_{B-1,B} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

以上のことから単位応力増分に対応した各クラ

ック進展長さの遷移確率を定義することができれば、マルコフ理論を用いて確率的に評価することができる. そして (5) 式の遷移確率はポアソン過程で、(6) 式はランダムウォークを用いて定式化することができる.

2.2 ランダムウォークの概念¹⁾

脆性材料は応力の増加に伴って徐々にクラックが進展していく. クラックの進展は連続的なものとして考えられるが、応力の増加を有限な区間に区切って考えるとその微小区間の応力増分においてはクラックが進展するかしないかの二通りの考えだけを考慮すればよいことになる. その概念図を図 1 に示す.

任意のクラック進展状態 i で平均応力が X 発生している時、微小応力増分 ΔX 増加後のクラック進展確率を r_i 、進展しない確率を q_i とする. ここで $q_i + r_i = 1$ である. この確率をそれぞれの状態で求めることができれば応力とクラックとの関係を確率評価できたといえる. そしてこの仮定をランダムウォークと呼ぶ.

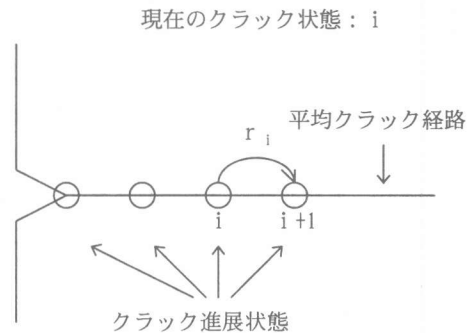


図1. ランダムウォーク概念図

各状態での遷移確率はあらかじめ求めた応力—クラック進展関係から導くことができる. ク

ラック状態 i に対応する平均応力を $\bar{X}_i$ 、そしてそれに対応する変動係数を s_i^2 とすると任意の状態での遷移確率は次のように定式化することができる.

$$r_i = \frac{(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i)}{(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i) + (s_{i+1}^2 - s_i^2) + 1} \quad (7)$$

しかしこのモデルでは欠点が見られる。まず損傷状態の設定しだいで確率の結果が大きく変わることである。実際問題においては対象物の損傷状態はその解析に都合の良いレベルで設定できることが望ましい。ミクロな視点でのクラック進展を考えるにあたっては、よりB（損傷状態総数）の値を大きくする必要がある。

また応力が単位応力増分（ ΔX ）を越えた場合その応力に対応した回数だけ遷移確率を掛け合わせればよいが、その回数が大きければそれに比例してクラック進展の状態予測には誤差が生じることが考えられる。

簡単な例を挙げて説明する。初期段階での解析対象物の状態は健全であるとし、損傷位置状態を100段階に分類し、各遷移確率は $q=0.1$, $r=0.9$ で一定とする。このとき解析対象物が破壊する確率は q^x となる。破壊応力に達するとき、つまり $x=99$ のとき破壊確率は 2.9512×10^{-5} となる。この値は直感的に確率を過小評価しているといえるだろう。つまりこれはクラック進展の確率経路を2種類のみ考慮しているため、精度が悪くなる傾向を示している。この概念を図2に示す。この図において矢印はクラック進展確率の経路を表わしている。これを見てわかるように実際の解析値よりもクラックの進展量が大きくなる場合を考慮していないため、確率評価を正しく表現することができない。その欠点を補うため、複数のクラック進展を考慮することので

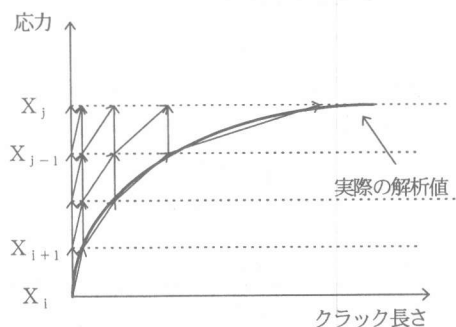


図2. ランダムウォークによる確率解析概念図

きるポアソン過程による定式化を述べる。

2.3 ポアソン過程³⁾

多くの確率問題では、対象とする事象は時間軸および空間軸の任意の点で起こりうる。このような時間的・空間的な問題をモデル化するには時間または空間を小区間に分割し、各区間では事象がいかなる時刻でも発生しうると仮定し、なおかつ1区間内で2回以上事象が発生することを考慮する。このような仮定のもとで事象の発生確率はポアソン過程でモデル化することができる。

形式的には、ポアソン過程は次のような仮定に基づいている。

①事象はいかなる時刻、空間のいかなる場所でもランダムに発生しうる。

②与えられた時間区間での事象の発生は、それと重複しない他の任意の区間に対して独立である。

③応力増分 ΔX における事象発生の確率は ΔX に比例し、 $\nu \Delta X$ と表せる。ただし、 ν は単位時間当たりの平均発生回数である。 ΔX の間に事象が2回以上発生する確率は無視できる。

以上の仮定によれば、応力増分の間にクラックが進展する量はポアソン分布に従う。すなわち、応力の平均値 X におけるクラック進展ポイント数を c とすると次式のようにになる。ただし実質のクラック進展量は図3に示す関係によって求める値であり、 c はそのクラック進展量を整数に変換した相対的な値とする。

$$P(X_i = c) = \frac{(\nu X)^c}{c!} e^{-\nu X}, \quad c = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

このモデルを用いることで損傷状態総数（B）を自由に変えることができ、損傷をより精度よく表わすことができる。

本研究では、平均発生率 ν のポアソン過程でモデル化する。解析によって応力 X_0 発生時に C_0 のクラック進展ポイントがあることが既知であるとする。その時の尤度関数は次式で与えられる。

$$L(v) = P(\text{応力} X_0 \text{ のとき } c_0 \text{ クラックポイントが進展} | v) \quad (9)$$

$$= \frac{(vX_0)^{c_0}}{c_0!} e^{-vX_0} \quad v \geq 0$$

他に v を推定するための情報がないものとし、あいまいな事前分布を一様分布として仮定する。これより、 v の事後分布は次のようになる。

$$f''(v) = kL(v)$$

$$= k \frac{(vX_0)^{c_0}}{c_0!} e^{-vX_0} \quad v \geq 0 \quad (10)$$

正規化を行うと、 $k = X_0$ となる。以上より、今後応力の平均値が X_j で c のクラックポイントまで進展するという事象の確率は次式のようになる。

$$P(i, k) = \int_0^\infty P(i, k | v) f''(v) dv$$

$$= \int_0^\infty \frac{(v\Delta X)^c}{c!} e^{-v\Delta X} \cdot \frac{X_0 (vX_0)^{c_0}}{c_0!} e^{-vX_0} dv$$

$$= \left(\int_0^\infty \frac{(\Delta X + X_0)^c [\nu(\Delta X + X_0)]^{c+c_0}}{(c+c_0)!} e^{-\nu(\Delta X + X_0)} d\nu \right)$$

$$\times \frac{(c+c_0)!}{c!c_0!} \frac{(\Delta X^c X_0^{c_0+1})}{(\Delta X + X_0)^{c+c_0+1}} \quad (11)$$

カッコの中の積分はガンマ密度関数であるから、

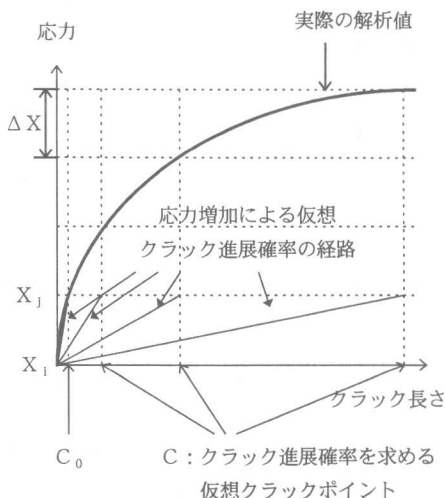


図3. ポアソン過程による遷移確率解析概念図

この積分の値は 1. 0 になる。したがって実際に用いる式は次のようになる。

$$P(i, k) = \frac{(c_k + c_0)!}{c_k!c_0!} \frac{(\Delta X / X_i)^{c_k}}{(1 + \Delta X / X_i)^{c_k + c_0 + 1}} \quad (12)$$

ここで X_i および c_k は解析結果から得られる平均応力、任意のクラック進展ポイントを示し、 ΔX は単位応力増分 ($\Delta X = X_j - X_i$) である。またポアソン過程の概念図を図 3 に示す。

3. 破壊力学を用いたクラック進展解析²⁾

応力とクラック量の関係は破壊力学の R カーブの概念を用いて求める。R カーブによる応力-クラック関係の一般式を (13) に示す。

$$X = \frac{\sqrt{R(a - a_0)E_c}}{\sqrt{\pi a} F(a/d)} \quad (13)$$

ここで X は平均応力、 E_c ヤング率、 $R(a - a_0)$: クラック進展長さ ($c = a - a_0$) をパラメータとした抵抗エネルギー (R カーブ)、 $F(a/d)$: 幾何形状依存関数^{*2}、 a : 進展後のクラック長さ、 a_0 : 初期クラック長さ (切欠き長さ) である。

寸法を考慮した応力との関係を (14) に示す。

$$\sigma_N = \frac{Af_u}{\sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}} \quad (14)$$

ここで、 f_u : 引張強度、 d : 影響範囲、 A 、 d_0 : 実験結果によって定義される定数、 $\sigma_N = C_n P_u / (bd)$: 平均引張強度、 P_u : 最大荷重、 b 、 d : 供試体の幅と高さ、 C_n : σ_N を決定するパラメータである。

(14) 式で Af_u と d_0 がわかると R カーブは次のように得られる。

$$R(a - a_0) = G_f \frac{g'(\gamma)c}{g'(\alpha_0)c_f} \quad (15)$$

$$\frac{c}{c_f} = \frac{g'(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \left[\frac{g(\gamma)}{g'(\gamma)} - \gamma + \alpha_0 \right] \quad (16)$$

$$G_f = \frac{(Af_u)^2}{c_n^2 E} d_0 g(\alpha_0) \quad (17)$$

$$c_f = \frac{d_0 g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \quad (18)$$

ここで $\alpha_0 = a_0 / d$, $g(\alpha_0)$: エネルギー解放率, γ : 任意の変数, G_f : 破壊エネルギー, c_f : 影響クラック長さ

γ に適当な値を与えることにより, クラック長さと R カーブの値を計算することができる。

4. 解析例

4. 1 解析モデル概要

解析モデルを図 4 に示す。材料定数は (ヤング係数 : $1.52 \times 10^4 \text{ MN/m}^2$, 引張強度 : 3.44 MN/m^2) である。切り欠きのある供試体の 3 点曲げ試験についての解析を行い, 文献¹⁾ を参考に $d=5.08 \text{ cm}$ での実験結果をもとに 2 種類 ($d=1.27, 20.32 \text{ cm}$) の寸法で応力-クラック解析を行った。

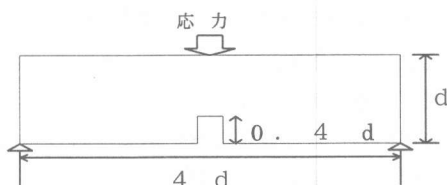


図 4. 解析モデル

4. 2 解析結果

実験結果によって得られた R カーブを図 5 に, d を変化した場合の応力-クラック関係を図 6 に示す。

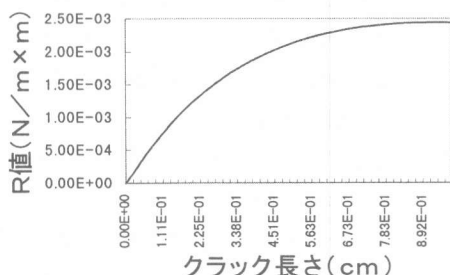


図 5. R カーブ

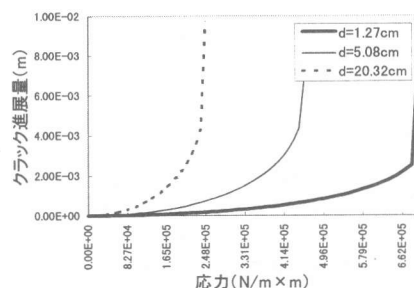


図 6. 寸法の違いによる応力-クラック関係
マルコフ理論による応力とクラック量の関係を図 7 に示す ($B=10$)。ここで示す各曲線は確率で考えられる応力-クラック進展関係を乱数を用いてランダムに示したものである。

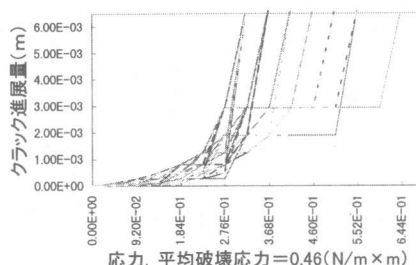


図 7. 応力増加に伴うクラック進展

また比較のため以下の解析結果を示す。

比較 1 : B の値の違いによる確率の変化 (図 8, $B=5$, 図 9, $B=20$)。

比較 2 : 供試体寸法の違いによるクラック進展解析の変化 (図 10, 11)。

比較 3 : それぞれの寸法による破壊確率の累積密度関数の変化 (図 12)。

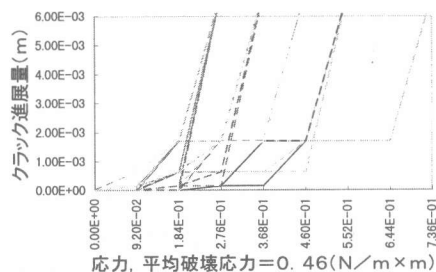


図 8. $B=5$ の場合のクラック進展解析

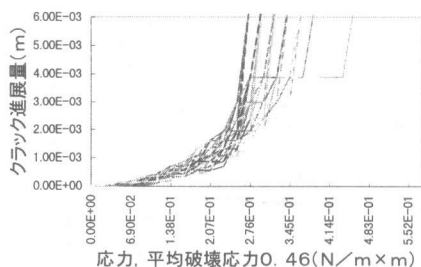


図 9. B = 2.0 の場合のクラック進展解析

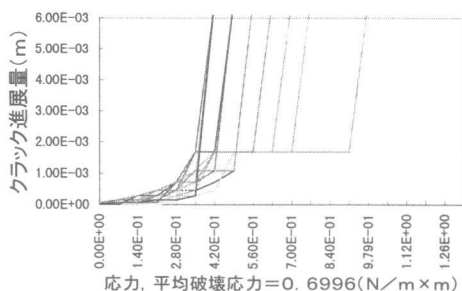


図 10. d=1.27cm のクラック進展解析

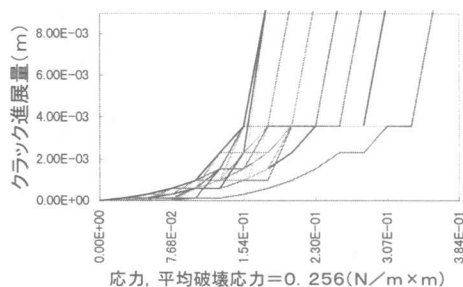


図 11. d=23.032cm のクラック進展解析

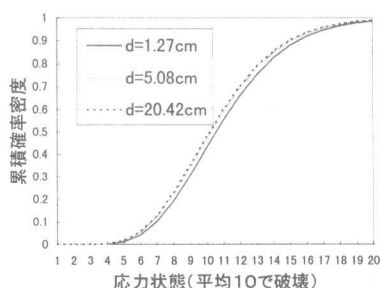


図 12. 寸法の違いによる累積密度関数の変化

今回の解析では各単位応力増分ごとの連続的なクラック進展の確率評価をすることができた。またランダムウォークの理論に比べポアソン過程による定式化では、B の設定数による確率評

価の影響をかなり抑えることができた。しかしより厳密に考察すると、比較 1 において損傷レベル B の設定数によりクラック進展確率の評価にばらつきが見られ、B の設定数が多いほど平均破壊応力に達する前に解析モデルが破壊に達する結果がみられた。このことから定式化のさらなる改良が必要である。また比較 2 において実験により一つの供試体の応力-クラック関係が明らかになれば、異なる供試体寸法のクラック進展確率を予測し実験結果と同様に評価することができた。そして比較 3 では寸法の違いによる累積密度関数はほぼ同様の結果が得られている。これは平均発生率を変化させていないためであり、実際には実験結果からモデル寸法に対応した平均発生率を求め、それを代入することでより寸法によるばらつきを考慮したクラック進展解析が可能であると考えられる。

5. まとめ

マルコフ理論を用いてコンクリート内部の引張クラックのランダム成長に関するモデルを定式化し、切欠きを有するコンクリート 3 点曲げ部材への適用を試みた。その結果、ポアソン過程を用いることで設定数 B にあまり影響を受けないクラック進展確率を評価することができた。また実験で得られた結果を利用して異なる寸法での応力-クラック関係を R カープによって推定し、クラック進展確率の評価へ応用できることが示された。

参考文献

- 1) Yunping, X and Zdenek, P.B : Random growth of crack with R-curve: markov process model, Engineering fracture mechanics, vol.57, No.6, pp.593-608, 1997
- 2) Tada, H.: The stress analysis of cracks handbook, Del Research Corp, 1983.
- 3) 伊藤学・亀田弘行：土木・建築のための確率・統計の基礎，丸善株式会社，pp113-120, pp.323-336, 1977.6