

論文 地震荷重を受ける PC タンクの動水圧の算定

宅野詩織^{*1}・森川慎吾^{*2}・中村秀明^{*3}・浜田純夫^{*4}

要旨：本研究では、内容液～タンク～地盤との相互作用を考慮した PC タンクの地震応答解析を有限要素法を用いて行い、タンク壁面に生じる動水圧を明らかにし、従来の慣用計算法との比較を行った。内容液は微小波高理論と速度ポテンシャル理論より定式化されており、内容液～タンクの連成解析が可能となった。また、地盤の仮想境界には粘性境界が用いられており、タンク～地盤との相互作用が考慮されている。本研究により地盤の影響やタンクの剛性を考慮した詳細な検討が可能になり、タンク壁面に導入するプレストレス力をより詳細に検討することが可能となった。

キーワード：動水圧, 速度ポテンシャル理論, 粘性境界, FEM, PC タンク

1. はじめに

1958 年に我が国最初の本格的なプレストレストコンクリート（以下 PC）タンクが採用されてから、水道用配水池を中心とし数多くの地上式円筒タンクが建設され、今日では、日常生活や産業活動には必要不可欠な物となっている¹⁾。PC タンクは液密性・耐久性に優れ、また現地施工の簡素化・工期の短縮化も図れることから経済的にも優れている。円周方向プレストレスを求める方法として従来多く用いられているのが、荷重バランス法である。この方法は、静水圧に相当する力と余裕圧縮力（0.49～0.98MPa）の和をプレストレス力とし、動水圧などの荷重は静水圧に比べて微小なため無視している²⁾。しかし、兵庫県南部地震のような加速度の大きな地震の場合には動水圧がかなり大きくなると考えられる。更に、従来の慣用計算法はタンク壁を剛体を仮定して、地震力を静的な荷重に置換しているため、タンク壁の変形が動水圧に及ぼす影響を考慮していない³⁾。

そこで、本研究では内容液の運動を速度ポテンシャル理論を用いて表し、地盤モデルの側方、底面には遠方地盤の剛性やエネルギー逸散効果を考

慮して、エネルギーの吸収能は必ずしも十分でない場合もあるが取り扱いの簡単な粘性境界を用い、内容液～タンク～地盤との相互作用を考慮した PC タンクの地震応答解析を FEM を用いて行った。この解析法による動水圧の解析結果と従来の慣用計算法による動水圧の解析結果との比較を行い、本手法の妥当性について検討を行った。

2. 解析方法

本解析手法は半無限の広がりをもつ地盤の上に築造されている PC タンクの地震応答解析を行うもので、地震波の各周波数に対する周波数応答を求め、フーリエ逆変換により時刻歴応答を求めるものである。内容液は非粘性、非圧縮性であり、その運動は非回転であると仮定し、微小振幅理論が適用できるものとする速度ポテンシャルが定義できる。^{4),5)}

2.1 タンク～内容液の運動方程式と境界条件

(1) 内容液の運動方程式

図-1 に示すような境界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ で囲まれた領域 Ω について考える。水の変位が微小との仮定のもとで水の運動方程式は、速度ポテンシャルを

*1 前田設計株式会社（元山口大学大学院 工学研究科社会建設工学専攻） 工修（正会員）

*2 浅野工事（株）技術部

*3 山口大学助教授 工学部知能情報システム工学科 工博（正会員）

*4 山口大学教授 工学部社会建設工学科 Ph.D.（正会員）

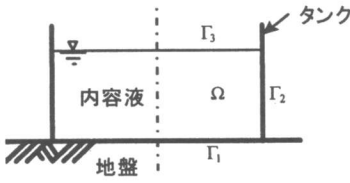


図-1 領域と記号

ϕ とすると次のように表される。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

ここで C は水中での音速、 ∇ はラプラスの演算子である。軸対称問題では、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

となる。水の圧縮性を無視する場合は式(1)は次のようになる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

(2) タンク壁面での境界条件

タンクと内容液の境界上では液体速度の垂直成分は壁面の速度と同じである。壁面の境界条件は次のように表される。

タンク底面 Γ_1 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 u_z はタンク底面の変位（上向きが正）

タンク側面 Γ_2 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \dot{u}_{gn} + \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (5)$$

ここで、 $\dot{u}_{gn}$ はタンク基部の速度のタンク接水面に対する法線方向成分であり、 u_r はタンク側面への r 方向変位（外向きが正）である。

(3) 液体の自由表面の境界条件 Γ_3

自由液面の圧力は大気圧となることを考慮して微小波高理論の下に自由液面の運動方程式から次式が得られる。

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=H} \quad (6)$$

ここで、 g は重力加速度であり、 H は内容液の高さ、 η は静止液面の (r, θ, H) なる座標点から

上で時間 t における自由液面の高さを示す。

一方、自由液面の鉛直方向の液体の速度も同様に液面自身の法線方向速度に等しいと見なせるので、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7)$$

式(6)、(7)より自由液面の境界条件が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=H} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (8)$$

2.2 有限要素法による定式化

$\{\phi\}$ を θ 方向にフーリエ級数展開し、その振幅をフーリエ速度ポテンシャル $\{\Phi\}$ とすると、

$$\{\phi(r, \theta, z; t)\} = \{\Phi(r, z; t)\} \cos m\theta \quad (9)$$

ここで、 m はフーリエ係数の次数であり、水平に一樣な地震に対しては $m=1$ のみを考える。

Galerkin 法により有限要素法のための定式化を行う。

$$\int_V \delta \Phi \left(\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dv = 0 \quad (10)$$

式(10)に式(9)を代入し、部分積分を行い、内容液の密度 ρ_w を掛けて整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_w}{C^2} \int_V \delta \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \cos^2 m\theta dv \\ & + \rho_w \int_V \left(\frac{\partial \delta \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cos^2 m\theta dv \\ & + \rho_w \frac{m^2}{r^2} \int_V \delta \Phi \cdot \Phi \cos^2 m\theta dv \\ & = \rho_w \int_V \delta \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos^2 m\theta ds \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、式(11)の右辺は境界条件より定まる項である。形状関数を用いて要素内の速度ポテンシャルは次のように表せる。

$$\Phi = [N] \{\Phi\} \quad (12)$$

ただし、 $N = [N_1, N_2, \dots, N_n]$

$$\{\Phi\} = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}^T$$

n は要素を構成してる節点数

式(11)に式(12)を代入し、 $\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \pi$ の

関係を用いると次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
 & \pi \frac{\rho_w}{C^2} \int_1^1 \int_1^1 [N]^T [N] r |J| d\xi d\eta \{\ddot{\Phi}\} \\
 & + \pi \rho_w \int_1^1 \int_1^1 [B]^T [B] r |J| d\xi d\eta \{\Phi\} \\
 & + \pi \rho_w \frac{m^2}{r^2} \int_1^1 \int_1^1 [N]^T [N] r |J| d\xi d\eta \{\Phi\} \\
 & = -\frac{\rho_w}{g} \pi \int_1^1 [N]^T [N] r |J| d\xi \{\ddot{\Phi}\} \quad (\text{自由水面}) \\
 & - \pi \rho_w \int_1^1 [N]^T [N]^* r |J| d\xi \{\dot{u}_b\} \quad (\text{タンク底面}) \\
 & + \pi \rho_w \int_1^1 [N]^T [N]^* r |J| d\eta \{\dot{u}_r + \dot{u}_g\} \quad (\text{タンク側面})
 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$[N] = [n_r, n_\theta, n_z] [N]$$

n_r, n_θ, n_z は法線の r, θ, z 成分である。

$|J|$ はヤコビンマトリクスの行列式である。

タンク底面では、 $n_r = 0, n_\theta = 0, n_z = 1$ であり、 $\{u_b\}$ はタンク底面を構成している節点の変位となり、タンク側面では、 $n_r = 1, n_\theta = 0, n_z = 0$ であり、 $\{u_r\}$ はタンク側面を構成している節点の変位となる。

式(13)より内容液の運動方程式は次のように表せる。

$$[M_\Phi] \{\ddot{\Phi}\} - [C_{\Phi T}] \{\dot{u}\} + [K_\Phi] \{\Phi\} = \{f_\Phi\} \quad (14)$$

また、動水圧は ρ_w を水の質量とすると、

$$P_d = -\rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (15)$$

従って、構造物に作用する動水圧に基づく節点力は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 \{f_p\} &= (\pi \rho_w \int_1^1 [N]^T [N] r |J| d\xi \\
 &+ \pi \rho_w \int_1^1 [N]^T [N]^* r |J| d\eta) \{\Phi\} \\
 &= -[C_{\Phi T}]^T \{\dot{\Phi}\}
 \end{aligned} \quad (16)$$

2.3 粘性境界を導入したタンク～地盤動的相互作用連成系の解析

本研究では、半無限の地盤上に建設された PC タンクを対象としている。有限要素法では、半無限に広がる地盤のうち有限な領域しか解析できないので仮定の境界が生じる。(図-2 参照) そこで、本研究では、エネルギーの吸収能は必ずしも十分でない場合もあるが取り扱いの簡単な粘性境界を用い、地盤モデルの側方、底面には、遠方地盤の剛性や、エネルギー逸散効果を考慮した。粘性境界を導入した相互作用系の運動方程式は未知量と既知量に分けて次式で表される⁹⁾。

$$\begin{aligned}
 & [M] \{\ddot{u}\} + ([C] + [C_B] + [C_s]) \{\dot{u}\} + [K] \{u\} \\
 & = -[M] \{I\} \ddot{u}_g + \{f\} + [C_s] \{\dot{u}_f\} \\
 & + [G_s] \{u_f\} + [G_{cs}] \{\dot{u}_f\}
 \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $[M]$: 解析領域の質量マトリクス

$[C]$: 解析領域の減衰マトリクス

$[K]$: 解析領域の剛性マトリクス

$[C_B]$: 底面での粘性境界マトリクス

$[C_s]$: 側面自由地盤における粘性境界マトリクス

$[G_s]$: 側方境界剛性マトリクス

$[G_{cs}]$: 側方境界減衰マトリクス

$\{u_f\}$: 自由地盤の変位ベクトル

$\{\dot{u}_f\}$: 自由地盤の速度ベクトル

$\{I\}$: 加振方向に応じて 0, 1 を与えるベクトル

$\ddot{u}_g$: 基盤面加速度

2.4 内容液～タンク～地盤連成系の運動方程式

内容液～タンク～地盤連成系の運動方程式は、内容液系の運動方程式である式(14)とタンク～地盤系の運動方程式である式(17)に内容液からの動水圧に基づく節点力である式(16)を加えたものを組み合わせて次式が与え、変形させて対称にしている。

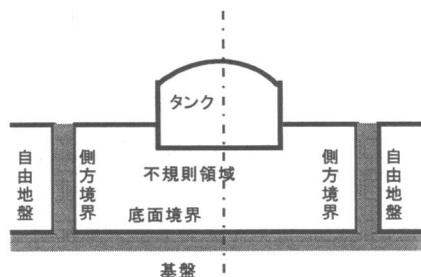


図-2 タンク～地盤相互作用系

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -M_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ -\ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_T & -C_{\phi T}^T \\ -C_{\phi T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ -\dot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ -\Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_s \\ f_\phi \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで, $[C_T] = [C] + [C_B] + [C_s]$ (19)

$$\begin{aligned} \{P_s\} &= -[M]\{\ddot{u}_g\} + \{f\} + [C_s]\{\dot{u}_f\} \\ &+ [G_s]\{u_f\} + [G_{cs}]\{\dot{u}_f\} \end{aligned} \quad (20)$$

式(18)を解くことにより内容液～タンク～地盤連成系の解が求まる。

3. 数値解析例

3.1 内容液～タンク連成系の解析

(1) 解析条件

内容液とタンクが連成する系の解析例として鹿児島市手配水池のPC円筒タンク(Tank1)を取り上げた。本解析法と水槽内部の水を仮想分布質量と考える簡略法²⁾、水平加速度を受けた時の地震時動液圧を水平慣性力により引き起こされる液体の衝撃圧(impact pressure : ip)と液面動揺(スロッシング)による振動圧(oscillate pressure : op)に分け、それぞれ別個に求めている Housner 理論³⁾との比較を行った。内容液、タンクの物性値は表-1に示すとおりである。入力加速度はEl Centro NS成分(1940年 Imperial Valley 地震)を用い、最大加速度を水平震度0.2に対応させ、 1.96m/s^2 に修正したものを用いた。なお、簡略法で用いる水平震度 k_h は0.2としている。解析は、周波数領域で時間刻み0.02secで行った。

(2) 解析結果

従来の慣用計算法で算出された動水圧分布との

表-1 タンク諸元及び材料特性値(Tank1)

容量	37100m ³	内容液単位体積重量 N/m ³	9806.65
水深	15.6m		
内径	55.0m	タンク単位体積重量 N/m ³	24500
壁厚	0.4m		
高さ	19.0m	ヤング係数 N/mm ²	3.43×10^6
底版厚	2.0m	ポアソン比	0.2

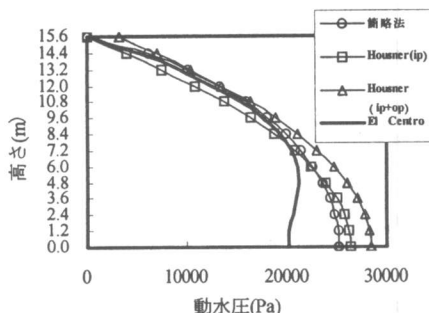


図-3 動水圧分布

比較を行うため、タンクの側壁各点に生じる動水圧を図-3に示す。なお、本解析法はEl Centro入力時における結果は動水圧の時刻歴の最大値を示した。2つの慣用計算法の動水圧と有限要素法による動水圧を比較すると、簡略法による動水圧とHousnerの方法による動水圧は、非常によく似ている。有限要素法による動水圧はタンク底部で慣用計算法に比べ動水圧が小さくなっている。慣用計算法では、タンク壁を剛と仮定して算出しているため、タンク底部で動水圧が大きくなっている。有限要素法のようにタンク壁を剛と仮定しない場合には、タンク壁の変形によって生じる圧力(変形圧)が生じるために、変形が最大となるタンク中間部での動水圧が最大となる。また、タンク中間部の変形に比較してタンク下部の変形は小さいために、剛なタンクのようにタンク底面で動水圧が最大になるとは限らない。

3.2 水平震度の違いによる動水圧分布

(1) 解析条件

次に、水平震度 k_h を0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0と変化させた時の動水圧を求めた。解析に用いたタンクの材料物性値は表-1(Tank1)、表-2(Tank2)に示すとおりである。有限要素メッシュの一例と

表-2 タンク諸元及び材料物性値(Tank2)

容量	2000m ³	内容液単位体積重量 N/m ³	9806.65
水深	5.0m	タンク単位体積重量 N/m ³	24500
内径	22.6m	ヤング係数 N/mm ²	2.89×10 ⁶
壁厚	0.25m	ポアソン比	0.2
高さ	6.0m		
底版厚	3.0m		

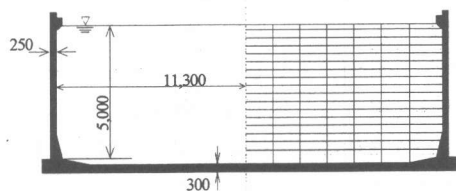


図-4 有限要素メッシュ

して図-4 に Tank2 のメッシュを示す。

入力地震波は El Centro NS 成分 (1940 年 Imperial Valley 地震) と兵庫県南部地震 NS 成分 (1995 年, 神戸海洋気象台) を水平震度に対応させて, 最大加速度 α を次の式より求めている。

$$\alpha = k_h \times g \quad (g : \text{重力加速度}) \quad (21)$$

Tank1, Tank2 の結果を, それぞれ図-5, 図-6 に示す。Tank1, Tank2 どちらも水平震度が大きくなれば, 動水圧も大きくなる。Tank2 のように内径比べて背の低いタンクの場合には, 内容液自体にあまり地震波の影響を受けないため背の高い Tank1 に比べ動水圧は小さい。従来の導入プレストレスは動水圧は静水圧に比べて小さいため静水圧に余裕圧縮力を加えたものとしていた。これは, 水平震度が 0.2 の時には静水圧に対して最大動水圧は Tank1 では 14%, Tank2 では 8% で, どちらも従来の導入プレストレスを用いることは可能である。しかし, 水平震度が 1.0 の場合には, 静水圧に対する動水圧の割合が Tank1 は 70%, Tank2 も 39% を占めていることから従来の導入プレストレスでは, 安全性が低下してしまう。特に Tank1 のように内径に対して背の高いタンクの場合には動水圧が大きくなる傾向があるため導入プレストレス力の考慮が必要である。

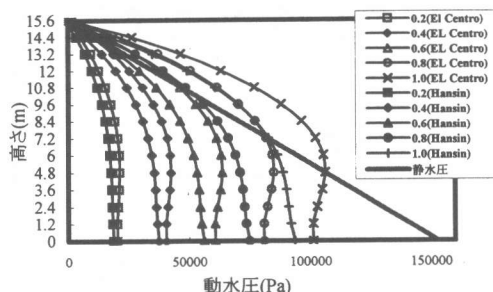


図-5 水平震度の違いによる動水圧分布 (Tank1)

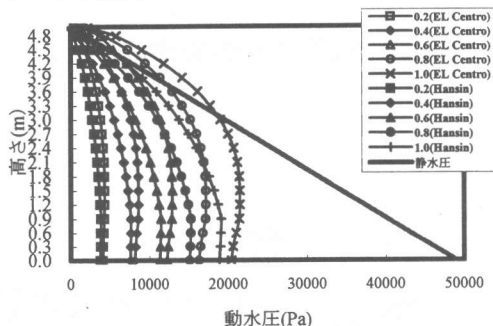


図-6 水平震度の違いによる動水圧分布 (Tank2)

3.3 内容液～タンク～地盤連成系の解析

タンクの地震時における挙動を正確に把握するためには, タンクと地盤との相互作用を考慮する必要がある。そこで, 内容液～タンク～地盤を全て連成させた解析を行う。

(1) 解析条件

解析で使用した地盤モデルは富士宮市淀師の地盤 7 を用いた。タンクモデルは Tank1 を用い, 材料特性値は表-1 と同じものを用いた。地盤の材料特性値を表-3 に示す。また, 有限要素メッシュを図-7 に示す。

(2) 解析結果

図-8 に地盤を考慮したものとタンクのみ動水圧分布を示す。地盤を考慮した方が動水圧は大きくなっている。これは, 地盤を考慮したことにより, タンク自体の応答速度が大きくなったためと考えられる。従来の慣用計算法や簡易法では, 地盤の影響は考慮できないが, 地盤の影響により動水圧が大きくなる場合もあり, より詳細な動水圧分布を求めるには内容液～タンク～地盤を全て連成させた解析を行う必要がある。

表-3 地盤の材料特性値

	V_{st} m/s	γ_t kg/m ³	H_t m	$4H_t/V_{st}$	T_G sec
I 種	333.3	2100.0	2.7	0.01	0.03
	321.5	2100.0	2.3	0.01	
	398.8	2100.0	3.7	0.01	
基 盤	750.0	2100.0	3.0	—	—

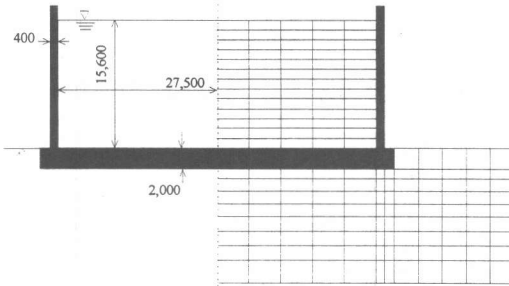


図-7 有限要素メッシュ

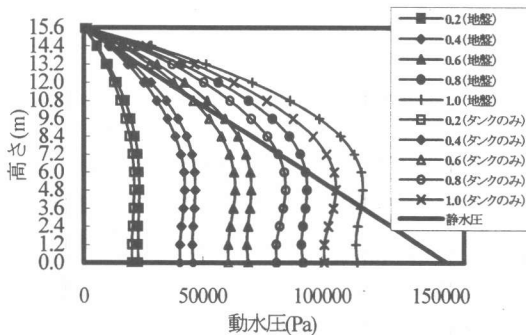


図-8 地盤を考慮した動水圧分布

4. 結論

本研究は、地震荷重を受ける PC タンク壁面に作用する動水圧をできるだけ正確に把握することを目的に、タンクと内容液との相互作用、タンクと地盤の相互作用を考慮に入れた解析を行い、従来の慣用計算法との比較を行った。以下に、本解析の結論を要約する。

- (1)速度ポテンシャル理論と粘性境界を用いた有限要素解析によりタンク壁の変形や地盤の影響を考慮に入れた解析が可能となった。
- (2)従来の慣用計算法ではタンク壁を剛と仮定しているため、タンク壁の変形が動水圧に及ぼす影響が考慮されていなかった。タンク壁の変形が大きいタンク壁中央部は、変

形圧の影響により動水圧が大きく現れている。

- (3)現在多くの設計では、静水圧をもとに、導入プレストレス力が決められているが、阪神大震災クラスのような大きな地震に対しては、動水圧の影響も大きく、導入プレストレスの決定に動水圧を考慮する必要がある。
- (4)タンク壁面に生じる動水圧は地盤の影響を大きく受ける。地盤を考慮することによりタンク自体の応答速度が増せば動水圧も大きくなるため、厳密な値を得るには地盤を含めた解析が必要である。

参考文献

- 1)池田尚治：PC 円形構造物の現況，最近のプレストレストコンクリート構造物と 30 年の歩み，プレストレストコンクリート技術協会，pp.31-40，1986.6
- 2)中国四国農政局土地改良技術事務所：PC タンクの設計，1991.3.
- 3)Housner, G. W. :Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.48, No.1, pp.15-35, Jan. 1957.
- 4)幕田 宏ほか：液及び基礎地盤との連成を考慮した貯槽の耐震解析プログラム，三菱重工技報，Vol.21, No.2, pp.310-318, 1984.3.
- 5)清水伸行ほか：円筒タンクの耐震設計法に関する研究，日本機学会論文集(C 編)，48 巻，426 号，pp.215-224, 1982.2.
- 6)三浦房紀ほか：非軸対称荷重を受ける地盤～構造系における粘性境界，山口大学工学部研究報告，1986.
- 7)日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編，1990.2.