

論文 コンクリートはりの引張破壊のための一増分解析法

伊良波繁雄*¹ 富山潤*² 波平伸*³ 和仁屋晴謹*⁴

要旨：本研究はコンクリートの引張軟化を考慮した数値解析で計算の不安定な最大荷重点付近およびそれ以降を解析するための一増分解析法を示した。スナップバックが生じているときの解析方法として弧長増分法があるが、弧長増分法は解析のアルゴリズムが複雑である。本研究で示している方法は、弧長増分法が静的な釣合い式を用いるのに対して、運動方程式を線形加速度法で引張軟化を考慮して増分解析を行う方法である。この方法は時間積分を行うため計算時間は長くなるが、計算のアルゴリズムは簡単になる。なお、この解析法を用いた数値解析例は良好な結果を示した。

キーワード：破壊力学、引張軟化、増分解析、動的解析

1. はじめに

有限要素法の引張軟化を考慮したひびわれ解析で、最大荷重点付近およびそれ以降を増分解析法で計算するときは数値解析上不安定になりやすい。特に増分解析の途中にスナップバックが生じる時の増分法としては弧長増分法[1]またはR min 法[2]等を用いた解析方法がある。R min 法を用いた解析は要素数が少ないときは、少ない増分回数で精度よく解を求めることが可能であるが、要素数が多くなると、最大荷重点以降において、各要素で引張軟化の進行、除荷等が至る所で起こると数値解が安定して得られない事がある。また、弧長法は解析プログラムの複雑さがある。本研究は引張軟化を考慮した数値解析で生じる、計算の不安定な最大荷重点付近およびそれ以降の軟化を解析するために、弧長増分法またはR min 法等のように静的な釣合い式ではなく速度、加速度を考慮した動的な釣合い式いわゆる運動方程式を用いた増分解析法を示した。

2. 解析方法

2. 1 剛性マトリックスおよび質量マトリックス

解析に用いた要素はトラス要素とはり高方向に層分割するファイバーモデルを用いたはり要素である。以下にトラス要素とはり要素の剛性マトリックスと質量マトリックスを示す。

(1) トラス要素

トラス要素の剛性マトリックスは図-2の節点1、2の軸方向節点変位を u_1 , u_2 とすると式(1)のように表される。図-1に示す引張軟化曲線を仮定したとき、引張軟化が生じたトラス要素は図-3のようにモデル化でき、このとき、軟化を考慮に入れた剛性マトリックスは式(2)のように表すことができる[2]。

* 1 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科、博士（工学） （正会員）

* 2 琉球大学大学院 工学研究科建設工学専攻 （正会員）

* 3 アジア測量設計

* 4 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 （正会員）

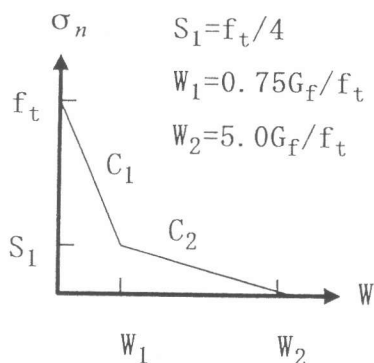


図-1 引張軟化曲線

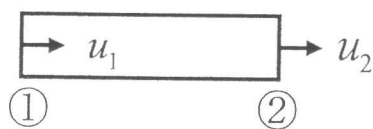


図-2 トラス要素

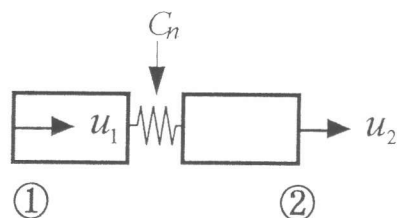


図-3 引張破壊した
トラス要素

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[K_{ep}] = \frac{C_n EA}{E + C_n L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 E はヤング係数、 A は棒の断面積、 L は棒の長さ、 C_n は図-1 の引張軟化曲線の第 n 勾配 ($n=1$ または 2) である。

トラス要素の質量マトリックスは、要素の全質量を図-2 の接点 1、2 に均等に分配した式 (3) に示す集中マトリックスを用いた。

$$[M] = \frac{\gamma AL}{g} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 γ はコンクリートの単位体積重量、 g は重力加速度である。

(2) はり要素

軟化を考慮した剛性方程式の導き方は文献[3]に詳しく述べているので、ここでは簡単に説明する。図-4 に示す節点 1、2 を有するはり要素の剛性マトリックスを導くのに、鉄筋コンクリートの分野でよく知られている方法、すなわち、一本のはりを高さ方向に分割して計算するファイバーモデルを用いた。図-5 に示すように、はりの軸方向に X 座標、高さ方向に Y 座標、 XY 面に垂直に Z 座標を仮定する。はり要素のひずみエネルギーは次式のように表すことができる。

$$U_e = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (4)$$

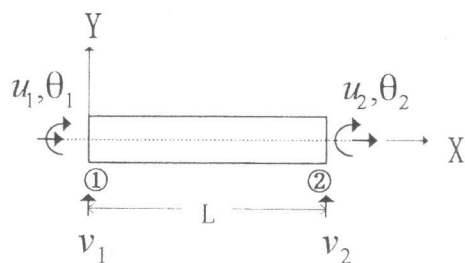


図-4 はり要素

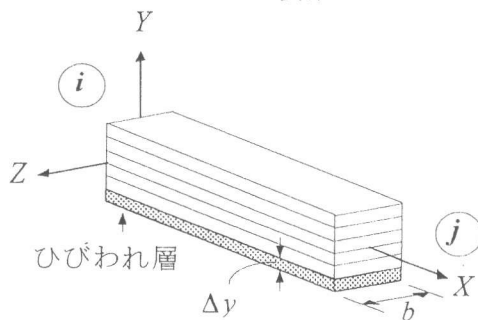


図-5 はり要素の座標

ここで、 σ_x は X 軸に垂直な面に作用する鉛直応力、 ϵ_x は X 方向のひずみである。平面保持の仮定をすれば、 ϵ_x は次のように表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \quad (5)$$

ここで、 u 、 v はそれぞれ X 方向と Y 方向の変位である。式(5)を式(4)に代入すると、ひずみエネルギーは 1 個の要素については次式のように表される。

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \right)^2 dx dy dz \quad (6)$$

軟化を考慮した剛性マトリックス $[K_{ep}]$ は式(5)の変位 u 、 v を、はり要素でよく用いるように、 u は一次式、 v は三次式を仮定し、式(6)を微分することで得ることができる。剛性マトリックスは要素の節点変位ベクトルを $\{u_1 v_1 \theta_1 u_2 v_2 \theta_2\}$ とすると、式(7)のように表される。

$$[K_{ep}] = \begin{bmatrix} E_a/L & 0 & -E_b/L & -E_a/L & 0 & E_b/L \\ & 12E_c/L^3 & 6E_c/L^2 & 0 & -12E_c/L^3 & 6E_c/L^2 \\ & & 4E_c/L & E_b/L & -6E_c/L^2 & 2E_c/L \\ & & & E_a/L & 0 & -E_b/L \\ sym & & & & 12E_c/L^3 & -6E_c/L^2 \\ & & & & & 4E_c/L \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 L は要素の長さ、 $dA = dydz$ 、 $E_a = \int_A E dA$ 、 $E_b = \int_A E y dA$ 、 $E_c = \int_A E y^2 dA$ である。

式(7)の係数の中に E_a 、 E_b 、 E_c のようにヤング係数 E の断面積分があるが、本研究では、図-5に示すように、コンクリートはりを高さ方向に分割して、層ごとに、引張応力による軟化を考慮する。このために E_a 、 E_b 、 E_c は次式のように数値積分に直して計算する。これらを具体的に示せば次のようになる。

$$E_a = b \sum_{j=1}^l E_j \Delta y, \quad E_b = b \sum_{j=1}^l E_j y_j \Delta y, \quad E_c = b \sum_{j=1}^l E_j y_j^2 \Delta y \quad (8)$$

ここで、 b ははりの幅、 l は層数、 H ははりの高さ、 $\Delta y = H/l$ 、 $y_j = j$ 層の Y 座標、 $E_j = j$ 層のヤング係数である。引張破壊域が進行するにつれて剛性が変化するため、分割した層の n 番目のヤング率は弾性状態、引張軟化状態に応じて次式を用いた。

$$\begin{array}{ll}
\text{弾性状態} & E_n = E \quad (\text{コンクリートのヤング率}) \\
\text{引張軟化} & E_n = \frac{C_1 EL}{(E + C_1 L)} \quad (\text{応力が引張軟化曲線の第一勾配の時}) \\
& E_n = \frac{C_2 EL}{(E + C_2 L)} \quad (\text{応力が引張軟化曲線の第二勾配の時})
\end{array} \quad (9)$$

ここで、 E はヤング係数、 C_1 、 C_2 は引張軟化曲線の勾配、 L は要素の長さである。

はり要素の質量マトリックスは軸方向の振動に対する式 (3) とたわみ振動については、たわみ v を三次式で仮定して導かれた質量マトリックスを加えた式 (10) を用いた。なお式 (10) は、はりの振動解析に良く用いられる式である。

$$[M] = \frac{\gamma A_i L_i}{g} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 13/35 & 11L/210 & 0 & 9/70 & -13L/420 \\ & & L^2/105 & 0 & 13L/420 & -L^2/140 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & sym & & & 13/35 & -11L/210 \\ & & & & & L^2/105 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 A は要素の断面積、 L は要素の長さ

2. 2 線形加速度法による増分法

増分型運動方程式は、式 (11) のように表すことができる。

$$[M]\{\Delta \ddot{U}\} + [C]\{\Delta \dot{U}\} + [K]\{\Delta U\} = \{\Delta P\} \quad (11)$$

ここで、 Δ は増分記号、 U は変位、 $\dot{U}$ は速度、 $\ddot{U}$ は加速度、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は全体剛性マトリックス、 $[C]$ は減衰マトリックス、 $\{\Delta P\}$ は外力である。

線形加速度法では、時間間隔 Δt 内では、加速度が直線的に変化するという仮定を用いて式 (12)、(13)、(14) を得ることができる [4]。

$$\{\Delta \dot{U}\} = -\frac{\Delta t}{2} \{\ddot{U}\} - 3\{\dot{U}\} + \frac{3}{\Delta t} \{\Delta U\} \quad (12)$$

$$\{\Delta \ddot{U}\} = -3\{\ddot{U}\} - \frac{6}{\Delta t} \{\dot{U}\} + \frac{6}{\Delta t^2} \{\Delta U\} \quad (13)$$

$$\left[[K] + \frac{3}{\Delta t} [C] + \frac{6}{(\Delta t)^2} [M] \right] \{\Delta U\} = \{\Delta P\} + 3[M] \left\{ \ddot{U} + \frac{2}{\Delta t} \dot{U} \right\} + [C] \left\{ 3\dot{U} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U} \right\} \quad (14)$$

本研究の増分解析法で用いている基礎式は式 (12)、(13)、(14) である。増分計算は時間間隔 Δt ごとに計算する方法を用いた。時間が増加するにつれ荷重や強制変位等は増加するので、当然、要素内応力も増加する。このために、増分の段階ごとに引張強度に達したかどうか

をチェックし、引張強度を越えた後からは、軟化を考慮したヤング係数を用いて増分解析を行った。なお、これから示す数値解析例では、減衰マトリックスは零として計算を行った。

3. 数値解析例

3. 1 無筋コンクリート柱の直接引張試験

本論文で示している解析方法がスナップバックが生じる問題に対して適用可能かどうかを確認するために、無筋コンクリート柱の直接引張試験のシミュレーションを行った。試験体は図-6に示すように、断面は幅が60mm、厚さが50mm、長さは250mmの長方形の柱である。柱の中央には幅5mm、深さ5mmの切り欠きが両側についている。コンクリートのヤング係数は $E=18000\text{N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは $G_f=59.3\text{J/m}^2$ である。解析結果は図-7に軸応力と柱の伸びの関係で示してあるが、この図で動的解析は今回の論文で示した運動方程式を用いた解析結果で静的解析は静的釣合式を用いて R_{min} 法で解析した結果である。静的解析では破壊点AからB、Cとスナップバックが生じているが、動的解析ではAから直接Cまで急激に応力が低下し、Cからは両解析方法とも一致している。なお、この計算例は時間増分 Δt を柱の一次の固有周期 (1.99×10^{-6} 秒) の1倍で材端部の強制変位の増分は0.001mmで計算した値である。なお、 Δt が固有周期の1~1/10倍の間では解析結果は図-7とほぼ同様な結果となる。

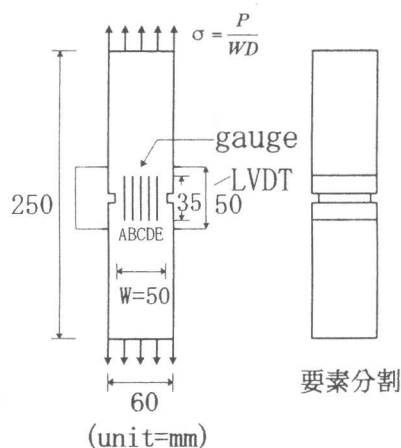


図-6 直接引張試験

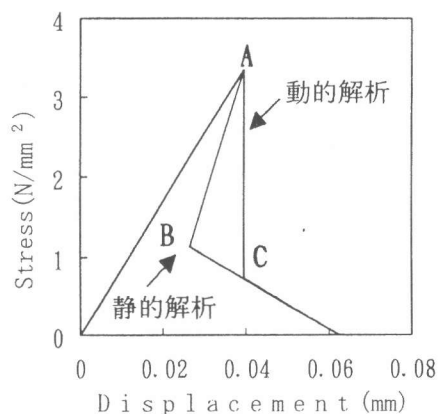


図-7 軸応力と柱の伸びの関係

3. 2 JCI 共通解析

1993年JCIで「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」が実施された[5]。ここでは共通解析のうち、普通コンクリートはり、鋼繊維補強コンクリートはりの曲げ破壊解析のうち各々1体づつを解析した結果を示す。解析は要素を50層分割し強制変位を加え载荷している。無筋コンクリートはりの解析は対称性を用いて3要素で解析した。図-8にその要素分割を示してある。図-9には普通コンクリートはり(#2、 $h=20\text{cm}$)の動的解析と内田らによる実験結果および平面三角形要素による解析[5]の比較を示す。最大荷重は内田らの解析、実験より少し高めとなっているが、最大荷重後の軌跡は、実験値との一致が良好である。この解析は $\Delta t=2.32 \times 10^{-7}$ 秒で载荷点での強制変位の増分は0.001mmである。

鋼繊維補強補強コンクリートはり(#4、 $h=10\text{cm}$)の引張軟化曲線は図-10に示すように二直線モデルで表して解析に用いた。解析結果は図-11に動的解析と内田らによる実験結果および解析結果[5]を示した。引張軟化曲線の1/5モデルを仮定したはり要素による解析では、最大荷重は内田らの解析、実験値の上限より少し高めとなっているが、荷重が高目となった原因はコンクリートの非弾性応力-ひずみ関係を用いなかった点にある。なお、 $\Delta t=1.12 \times 10^{-5}$ 秒で強制変位の増分は0.001mmである。

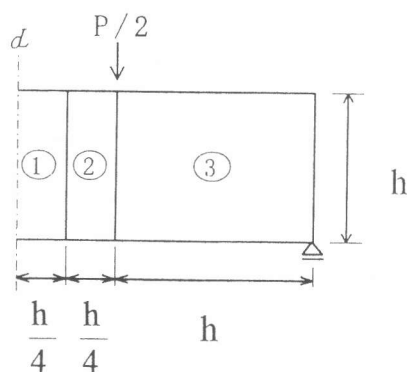


図-8 要素分割

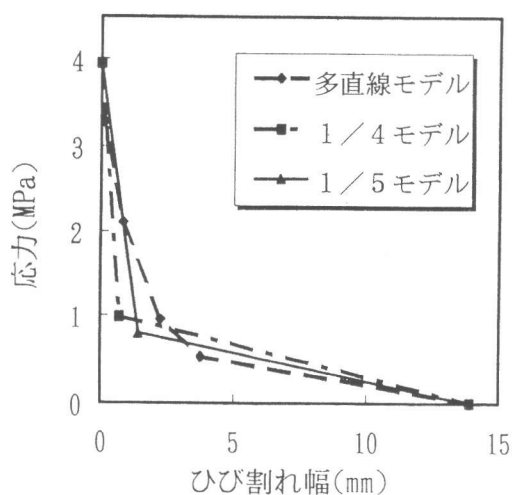


図-10 引張軟化曲線

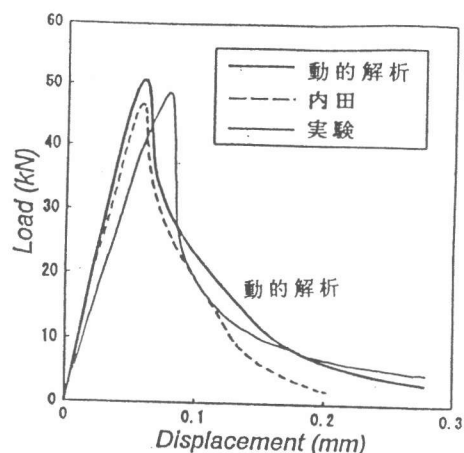


図-9 試験体(#2, h=20cm)の荷重・変位曲線

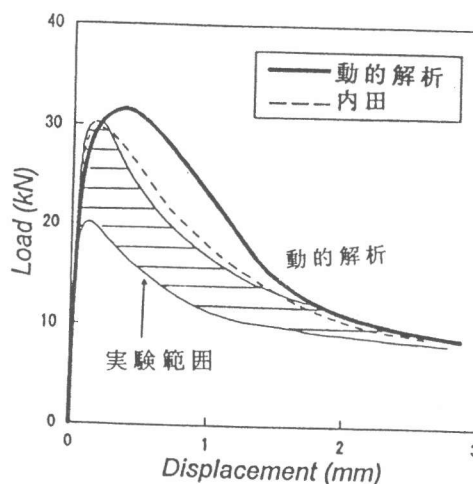


図-11 試験体(#4, h=10cm)の荷重・変位曲線

4. まとめ

本論文では、静的な釣合い式の代わりに速度、加速度を考慮した動的釣合い式いわゆる運動方程式を用いて増分解析を行う方法を示した。無筋コンクリート柱のトラス要素による解析結果から、増分解析の途中にスナップバックがおこるような問題に対しても増分解析は可能であることが分かった。コンクリートはりの曲げ破壊解析の結果からは、提案した解析方法を用いれば最大荷重後の荷重低下域でも良好な解を得ることができることが分かった。これらの問題はコンクリートに作用する圧縮力が小さい時の問題であるが、圧縮力が大きい時の問題は次の課題としたい。

参考文献

- [1] Rots, J.G: Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation, Delft Univ of Techn, 1988
- [2] 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 12, No. 2, pp. 753-758, 1990. 6
- [3] 伊良波繁雄: はり要素による引張軟化の解析的研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 14, No. 2, pp. 897-902, 1992. 6
- [4] 山田嘉昭: マトリックス法の応用, 東京大学出版会
- [5] 破壊力学の応用研究委員会報告書: 日本コンクリート工学協会, 1993. 10