論 文

[1083] ひびわれ診断におけるファジィ関係方程式の適用と逆解法

正会員○吉川弘道（武蔵工業大学土木工学科）
大塚 靖 （武蔵工業大学学生）
三浦健一郎（武蔵工業大学学生）
正会員 小玉克巳（武蔵工業大学土木工学科）

1．はじめに

医療やエンジニアリングの分野における診断や査定は、専門知識を有する経験者（いわゆるエキスパート）によってなされるのが一般である。エキスパートシステム（Expert System）は、このような診断や査定をコンピュータ上にて再現する知的プログラムで特定問題領域における専門知識（Domain-specific Knowledge）、および推論機構（Inference Engine）によって構成される。 本文は、コンクリート部材のひびわれ診断を対象とするエキスパートシステムの開発に関する一連の研究[1]のうち、ファジィ関係方程式とその逆解法について述べるとともに、本エキスパートシステムのプロトタイプによる推論事例を提示するものである。

2 本エキスパートシステムの概要とファジィ理論の導入

2．1 システム構成と診断問題

コンクリート系構造物は構築後何らかの原因でひびわれが発生することが多くあり、その原因推定と補修対策（たとえば[5]）は、コンクリート技術者にとっては重要な業務であり、長年悩みの種でもあった。

本システムは、建設現場にて観測できる症状および設計・施工・配合条件の両面より、発生原因を推定（診断）することを目的とするもので、ひびわれ診断エキスパートシステムと呼ぶ。調査作業の流れとしては、「PhaseⅠ」としてひびわれの諸症状をもとに一次診断を行い、２～３個の発生原因を抽出し、さらに設計・施工・配合条件からの二次診断（「PhaseⅡ」）を実施し、発生原因を特定するものである。

図－１ ファジィ関係と診断問題

本文では、前者の一次診断について報告するもので、これは模式的に示すと図－１のように考えることができる。すなわち、何らかの原因Xが入力値となり、力学的・物理化学的な因果関係Rによって、その症状Yが出力される一方向のシステムと考えればよい。 一般に、出力される応答値Yは、あいまいな量として認識されることが多く、これについて基本的に図－１の(a)と(b)のような２つのパターンが考えられる。(a)は、入力は確定的（crisp）であるが、因果関係があいまい（fuzzy）であることにより、その出力があいまいとなる場合であり、(b)は、因果関係は確定的であるが、入力があいまいであるため、その出力があいまいとなる場合である。

ここで、必要となるのは、関係Rと症状Yを知って、発生原因Xを推定することであり、いわ

ゆる逆問題（Inverse Problem）となり、診断問題の典型例である。（ちなみに、原因Ｘと症状Ｙから、関係Ｒを推定することを同定（Identification）という。）そして、Ｘ、Ｙ、Ｒのいずれかがあいまいな集合の場合、それぞれファジィ逆問題（診断問題）、ファジィ同定問題と呼ばれる[4]。

本文のようなひびわれの発生原因と症状に関する診断問題では、(C)のように入力および関係の両方があいまいと考える。そこで、本論ではファジィ関係方程式の適用を考え、その数学的表現について以下に述べるものとする。（ここでは、大里による表記法[4]を主として用いている。）

２．２　ファジィ関係方程式の適用

曖昧な関係にある二者間の関係をファジィ関係と言い、これをひびわれの発生原因$X=\{x_i\}$と、発生時の諸症状$Y=\{y_j\}$との間に適用することを提案する。この関係はマトリクス$R=\{r_{ij}\}$を用いて$X \times Y$上のファジィ集合として定義することができ、そのメンバシップ関数μ_Rを次式のように表示する。

$$\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,\ 1] \qquad (1)$$

集合X, Yの任意の要素x, yに対するファジィ関係Rのメンバシップ値$\mu_R(x,\ y)$は、閉区間［０，１］の中の適当な実数値を取り、"１"に近ければ関係Ｒが満たされる度合いが高く、"０"に近い程ファジィ関係Ｒが満たされないことを示している。このファジィ関係r_{ij}を用いてx_iとy_jとの間を次式のように表現できる。

$$\mu_Y(y) = \bigvee_x \{\mu_X(x) \wedge \mu_R(x,\ y)\} \qquad (2)$$

ここで、μ_Y, μ_Xはx_i, y_jのメンバシップ値、∨はｍａｘ演算、∧はｍｉｎ演算を示す。上式を簡単に$x_i \circ r_{ij} = y_j$　（３）のように表示することがある。ただし左式の記号"∘"はｍａｘ・ｍｉｎ合成演算記号と呼ばれ、まずｉについてｍｉｎをとり、次にｊについてｍａｘをとる演算を実行する。これは、「原因x_iが与えられたとき、r_{ij}を通して症状y_jが生じる」ということで、マトリクスＲが専門家の持っている知識に相当する。また、上式（３）のようなファジィ関係の合成演算に基づく方程式をファジィ関係方程式（Fuzzy Relation Equation）という。

ところで、あるファジィ関係方程式$X \circ R = Y$において、（ＲはＸ×Ｙ上の未知のファジィ関係、X, Yはそれぞれ既知のファジィ集合とする）、これを満たすＲの最大解R^*とは、どの精解Ｒに対しても$R \subset R^*$なる解を指す。すなわち、

$$\mu_R(x,\ y) \leqq \mu_{R^*}(x,\ y) \quad , \quad \{\exists\ (x,\ y) \ni X \times Y\} \qquad (4)$$

が成立することをいう。この$X \circ R = Y$の最大解R^*は、＠合成演算により以下のように求まる。

$$R^* = X @ Y$$
$$\text{ただし，}\ \mu_{R^*} = \mu_X(x)\ \alpha\ \mu_Y(y) = \begin{cases} 1 & \{\mu_X(x) \leqq \mu_Y(y)\} \\ \mu_Y(y) & \{\mu_X(x) > \mu_Y(y)\} \end{cases} \qquad (5)$$

この関係R^*は$X \circ R = Y$を満たすどのファジィ関係Ｒよりも大きい解になっている。

これは、ファジィ関係方程式を満足する精解Ｒは多数存在することがよく知られ、これらすべてを算出することは実用上不可能であることが多いためである。

ファジィ関係Q，R，Tに関するファジィ関係方程式Q∘R＝Tに対する最大解も同様に$R = Q^{-1} @ T$で求まるが、この場合の@合成演算はファジィ関係同士の演算であるので以下のように表示される。

$$\mu_{R^*} = \bigwedge_{w \in W} \{\mu_{Q^{-1}}(x, w)\ \alpha\ \mu_T(w, y)\} \tag{6}$$

ファジィ関係方程式X∘R＝Yにおいて、ファジィ関係Rとファジィ集合Yが既知でファジィ集合Xが未知の問題は、ファジィ関係方程式の逆問題と呼ばれ、その最大解X^*は、式[6]を準用し、以下のように求まる。

$$\mu_{X^*} = \bigwedge_{y \in Y} \{\mu_{R^{-1}}(x, y)\ \alpha\ \mu_Y(y)\} \tag{7}$$

以上をまとめると、ファジィ関係方程式において、式[2]が順問題、式[5]が同定問題、式[7]が逆（解析）問題として、メンバシップ値によって表示したものである。式[2]はｍａｘ・ｍｉｎ合成演算によってきわめて容易に求められたのに対して、同定問題（式[5]）と逆問題（式[7]）は最大解に限定した場合であっても代数学的には複雑な手続きを必要とする。

２．３　ひびわれ診断

このようなファジィ関係方程式をコンクリートの診断問題に適用するため、表－１のような集合ＸとＹを考えた。まず、発生原因については、x_1＝構造物の不等沈下，x_2＝支保工・施工時応力などの１０種を想定し、症状については、規則性，パターン，発生時期，ひびわれ幅，方向性，剥離の有無に分類し、これを２２項目に細分化した。実際のひびわれ問題はさらに複雑で多くの要因を持つ（例えば、[5]）と考えられるが、本文ではプロトタイプの完成を目的とし、主要なものに限定した。

表－１　ひびわれ問題における発生原因Ｘと症状Ｙ

発生原因　$X = \{x_i\}$
[x_1]…構造物の不等沈下
[x_2]…支保工・施工時応力
[x_3]…鉄筋の発錆
[x_4]…初期凍害
[x_5]…凍結融解
[x_6]…温度応力　外部拘束
[x_7]…温度応力　内部拘束
[x_8]…沈　降
[x_9]…アルカリ骨材反応
[x_{10}]…乾燥収縮

症状　$Y = \{y_j\}$			
規則性	[y_1]…部材長手直交方向	ひびわれ幅	[y_{13}]…微細（0.1mm）
	[y_2]…配筋方向		[y_{14}]…中（0.2～0.5mm）
	[y_3]…その他		[y_{15}]…大（1.0以上mm）
	[y_4]…無　し		
パターン	[y_5]…網状・亀甲状	方向性	[y_{16}]…鉛直方向
	[y_6]…一本のみ		[y_{17}]…水平方向
	[y_7]…一方向複数		[y_{18}]…斜め方向
	[y_8]…二方向複数		[y_{19}]…打設面上
			[y_{20}]…ランダム
発生時期	[y_9]…数時間～一日	剥離（ｽｹｰﾘﾝｸﾞ）	[y_{21}]…有り
	[y_{10}]…数　日		[y_{22}]…無し
	[y_{11}]…数十日以上～数カ月		
	[y_{12}]…一年以上		

次に、両者間のファジィ関係Ｒを設定し、そのメンバシップ値μ_Rを表－２のように設定した。（"０"の場合は空欄とした）。これは、ある一個の症状y_jに対して、１０個の原因x_i（$i=1 \sim 10$）の因果関係の程度を相対的に評価して、決定したものである。具体的には、経験技術者４名によるアンケート結果に基づいて設定した。これらの設定値の大小に関しては、経験豊富なエキスパートの間でも合意を得るのは難しく、より客観的な設定方法の検討が必要である。

表－2　ひびわれ発生原因Xと症状Yとの関係R

	規則性				パターン				発生時期				ひびわれ幅			方向性					剥離	
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	y_{21}	y_{22}
x_1			1.0				0.8				1.0	0.8	0.6	1.0	0.6	0.6	0.6	1.0				1.0
x_2			1.0				0.8		0.8	1.0			0.6	1.0	0.6	0.6	0.6	0.8				1.0
x_3		0.6					0.6					0.8	0.2	0.4	1.0	0.6	0.6			0.2	0.8	
x_4			0.2	0.8	0.8			0.2	1.0	1.0			0.4	1.0	0.4					0.8	0.6	
x_5			0.2	0.8	0.8			0.2			0.2	1.0	0.4	1.0	0.8					0.8	1.0	
x_6	0.6					0.4	1.0				1.0	0.8	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0					1.0
x_7	0.2		1.0			1.0	0.6			0.2	1.0		0.8	0.8	0.2	1.0	1.0					1.0
x_8		1.0			0.6			1.0	1.0	0.2	0.2		0.6	0.6					1.0			1.0
x_9				1.0	1.0							1.0	0.6	0.8	0.6					1.0	0.6	
x_{10}	1.0						1.0			0.2	1.0	0.2	1.0	0.8	0.2	1.0	1.0					1.0

※空白は［0.0］を表す

3　逆問題解析法の提案

3．1　既往の解析手法

ひびわれ診断問題では、図－1にて指摘したように、症状Yと関係Rを知って、原因Xを求める逆問題となる。ファジィ関係方程式の逆解法では、多数の解が存在することが多く、また多くの計算時間を要することが知られている。従って、原因数や症状数が多い場合、その逆解析に多くの推論時間を要し、実時間系のエキスパートシステムでは実用上困難な場合がある。

逆問題の数値解析法は、ファジィ理論における主要な論点として、1970年代後半から活発に論議されるようになり、たとえば、塚本らによる方法[3]がよく知られている。しかし、林・井村[2]によれば、塚本らによる方法では、原因数をm、症状数をnとするとき、理論的計算量がO（$m^{n+1}\ n$）となり、実用的に問題があることを指摘している。そこで、林らは、実用的な観点から簡略化されたファジィ対応の逆問題に対してO（$m\ n$）なる演算回数の超高速解法を提案した。しかし、この場合、症状の値により診断結果が得られない場合があり、この点を改良する必要がある。

3．2　著者らによる改良方法の提案

本文では、林・井村による超高速解法[2]をもとに若干の改良を加え、最大解に限定した逆問題の具体的な解析手法示すものとする。

まず、ある$p,\ q\in[0,\ 1]$に対して次のような合成ωおよび$\tilde{\omega}$を定義する[2]。

$$p\,\omega\,q=\begin{cases} q & \text{if } p>q \\ [q,\ 1] & \text{if } p=q \\ \phi & \text{if } p<q \end{cases},\qquad p\,\tilde{\omega}\,q=\begin{cases} [0,\ q] & \text{if } p>q \\ [0,\ 1] & \text{if } p\leqq q \end{cases} \quad (8)$$

ここでω合成は「ｐとｑが与えられて、$p\wedge z=q$（$\wedge$：ｍｉｎ演算）を満足するｚを見いだせ」という逆問題の解になっており、ϕは解がないことを表す（これは、@合成演算と同じ）。この合成記号を用いて、逆解析のアルゴリズムは以下のような手順となる。

・Ｓｔｅｐ　１：Yの各要素に対する非零化

症状Yに、もし”0”の要素があれば、これに、微小値（ここでは”０．０１”）を加える。

・Ｓｔｅｐ　２：U，V行列を求める。

$$U=\{u_{ij}\}=\{r_{ij}\,\omega\,y_j\},\qquad V=\{v_{ij}\}=\{r_{ij}\,\tilde{\omega}\,y_j\}$$

この時、各ｉ行ごとに$u_{ij(u)}$を小さい順に並べ替え、

空集合以外の最も小さいものを$UMIN_i$とする。

$$UMIN_i=\min_j u_{ij(u)}$$

ただし、$u_{ij(u)}$はu_{ij}の上限値を意味する。

・Ｓｔｅｐ　３：m×n行列C＝｛c_{ij}｝の算出。

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{if } u_{ij} \neq \phi \text{ and } u_{ij} \neq v_{ij} \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases}$$

この時、C行列の各列ｊごとの和を以下のように求める。

$$CSUM_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}$$

・Ｓｔｅｐ　４：C_{ij}および$CSUM_j$の変更。

c_{ij}＝１かつ$u_{ij(l)}$＞$UMIN_i$であるとき、c_{ij}の１を０に変更し$CSUM_j$を１だけ減らす。この修正によって$CSUM_j$＝０となったとき、c_{ij}と$CSUM_j$の値をもとに戻し、更に$UMIN_i$をＳｔｅｐ　１で求めた次に大きい値を用いて、もう一度条件に従いc_{ij}，$CSUM_j$を修正する。これをすべてのｉｊに対して繰り返す。

ただし、$u_{ij(l)}$はu_{ij}の下限値を意味する。

・Ｓｔｅｐ　５：x_iのメンバシップ値μ_Xの求解。

逆問題の解として、第ｉ要素x_iのメンバシップ値μ_Xを以下のように求める。

x_iは第ｉ行に対してc_{ij}＝１かつ$CSUM_j$＝１を満足するｊ列が、

（Ⅰ）全くない場合　　　　　　：$\mu_X = [0 \quad , UMIN_i]$

（Ⅱ）少なくとも一つある場合　：$\mu_X = [\max_{j_t} u_{ij_t(l)}, UMIN_i]$

ただし、j_tはC行列の第ｉ行においてC_{ij}＝１かつ$CSUM_j$＝１を満足する列である。このように最大解として与えられるμ_Xは、μ_X＝［下限値の最大値，上限値の最小値］のような区間値として与えられる。

４　数値シミュレーションおよび実問題への適用

以上述べた、逆解析手法および関係Ｒのメンバシップ値μ_R（前者が推論エンジン、後者が知識ベースに相当する）を、Microsoft Quick BASIC version 4.5によってプログラム化，データベース化すると共に、これらをパーソナルコンピュータに登載し、これを本ひびわれ診断システムPhase Ⅰのプロトタイプとする。

本プロトタイプの解析精度を確認するために、単独解x_iを想定した数値シミュレーションを実施した。これは、例えばx_4（初期凍害）が唯一の発生原因とすると、r_{4j}（ｊ＝１～２２）が症状として現れる（表－２参照）ことになるが、逆にこれが現場で観測された症状$y_j = r_{4j}$と考え、x_4が正しく推論されるかどうか試したものである。これをすべての発生原因について、数値シミュレーションを実行し、その結果を表－３に一覧した（ここで、［0.0,0.0］の場合は空欄としている）。

同表で、対角上の項が"１"，非対角上が"０"となれば、精解値であるが、プロトタイプによる数値はほぼ正しい推定結果を与えていることがわかる。ただし、いずれも、上限値の最小値は"１．０"としているものの、x_3，x_4，x_5，x_9は、下限値の最大値を"０．０"としている。従って、この４例についてはひびわれ発生原因のみを精解値として診断しているが、そのメンバシップ値は、［０，１］の全区間をとっている。このため、現段階では、一次診断では最大値を採

用することを考えている。（一次診断（Phase Ｉ）では、精解値の候補として、単一、または、複数個の原因を抽出することを目的としている。）また、症状としてR_{5j}を用いたとき、推定原因として精解値であるx_5の他にメンバシップ値は低いがx_9も挙げている。これは、いわゆる誤診断を意味するもので、表－２におけるr_{5j}とr_{9j}が近似していることによる帰結である。

表－３　単独原因を想定した数値シミュレーション結果

症状＼原因	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
R_{1j}	1.0,1.0									
R_{2j}		1.0,1.0								
R_{3j}			0.0,1.0							
R_{4j}				0.0,1.0						
R_{5j}					0.0,1.0				0.0,0.4	
R_{6j}						1.0,1.0				
R_{7j}							1.0,1.0			
R_{8j}								0.0,1.0		
R_{9j}									0.0,1.0	
R_{10j}										1.0,1.0

(j:1～22)

※空欄は"0.0,0.0"を示す

次に、実際に生じたひびわれ発生の事例[5]のうち４例について発生原因の推論を行い、その結果を表－４に記した。プロトタイプによる診断では複数の発生原因を３～５項目挙げているが、一方、専門家による実地検証では表中の網掛けの箇所を原因として指摘している。すなわち、本システムは、専門家による診断を挙げているが、そうでないものも含む診断結果となっている。このため、本システムはさらに、施工，材料，部材・設計，使用・環境の各種条件からのデータをリンクさせることにより、１個の発生原因を特定するもので、PhaseⅡとして現在開発を行っている。

表－４　プロトタイプによるによる実問題に対する診断結果

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	事例
No.1				0.0, 1.0		0.0, 1.0	0.0, 0.5	0.0, 1.0	0.0, 1.0		初期凍害による学校建築のひびわれ
No.2					0.0, 1.0	0.0, 1.0		0.0, 0.5	0.0, 1.0	0.0, 0.8	アルカリ骨材反応による外壁のひびわれ
No.3					0.0, 1.0				0.0, 1.0	0.0, 0.8	ＲＣ橋げた及び橋脚のひびわれ
No.4						0.0, 1.0		0.0, 0.8		0.0, 1.0	道路トンネル内壁のひびわれ

※空白は［0.0, 0.0］を表す

＜参考文献＞

[1]吉川弘道,小泉修,小玉克巳："ひびわれ診断エキスパートシステムの開発",土木学会第45年次学術講演会講演論文集第5部,294/295,1990,9,30

[2]林陽一,井村敦："ファジィ対応の逆問題の高速解法",第六回「ファジィシステムシンポジウム」講演論文集,日本ファジィ学会,183/188

[3]塚本弥八郎,田代勤："Fuzzy逆問題の解法",計測自動制御学会論文集,Vol.15,No.1,21/25,1979

[4]大里有生："ファジィ関係の概念と方法",日本ファジィ学会講習会「ファジィ理論の基礎」テキスト,37/56

[5]日本コンクリート工学協会："コンクリートのひびわれ診断・補修指針",218/222