

論文

[2129] 鉄筋コンクリート板の有限要素非線形解析

正会員○呉 智深 (名古屋大学工学部)

正会員 二羽淳一郎 (名古屋大学工学部)

正会員 吉川 弘道 (武蔵工業大学工学部)

正会員 田辺 忠顕 (名古屋大学工学部)

1. まえがき

近年超高層ビル・原子力構造物・海洋構造物など過酷な環境下での超大型構造への鉄筋コンクリート(RC)の適用が著しくなっている。この種の構造は通常プレートあるいはシェル要素の複合構造となっており合理的な設計を可能とするためには、コンクリートと鉄筋との相互作用、クラックによる応力集中あるいは分散作用、コンクリートの非線形挙動などを適切に数学的にモデル化するとともに、それらの相互作用を明確にしなければならない。その中でも、応力の増加にともなって発生するクラックの影響は大きく、RC構造の挙動の有限要素法による解析についての多くの研究の発展は、コンクリートのクラックをいかに解析の中に数式モデルとして取り扱うか、またコンクリートのクラックがRC構造の非線形性状に与える多様な影響をいかにモデル化するかの歴史であったといっても過言ではない。

面内力と曲げモーメントを受けるプレート・シェル要素構造物は通常三次元立体要素、古典的な板曲げ要素およびdegenerateシェル要素を用いて離散化されている。三次元立体要素はいかなる構造物に対しても適用でき、もちろんプレート・シェル構造物に対しても、その特性を精度よく表せるが実際解析を行うとき膨大な自由度が必要となり、計算時間も増大する。また、コンクリートの三次元の非線形構成則を構築するために、今の段階では利用しうる情報はまだ足りないと考えられる。このため多くの研究者は板曲げ要素を用いてRC構造の計算モデルを開発してきた。しかしながら、板曲げ要素は法線保持に基づいたもので面外せん断変形を考慮できない。そこで本研究は上記の問題点を鑑みて層分割法を用いた次数低減積分法により一点積分を施した双一次シェル要素の定式化を行った。また、著者らが近年開発したRCプレート・シェル要素の材料モデルを導入することによって、RC板の非線形解析を行い、数種の数値計算を実施しその有効性について考察した。

2. 定式化

degeneration conceptによるシェル要素の定式化の一般化手順については文献¹¹⁾に詳しく述べられている。さらに、著者の一人が層分割法を用いたdegenerationシェル要素を定式化し、RCプレート・シェルの非線形解析を通じその有効性を考察している⁹⁾。ここでは双一次変位関数を用いた場合について簡単にその概要を説明する。まず図-1に双一次degenerationシェル要素および座標系を示す。ここでは、4つの座標系が定義されている。すなわち、要素幾何形状を定義する全体座標系 x_i 、要素内の応力、ひずみを定義する局所座標系 z_i 、要素板厚方向および変位自由度の方向を定義する節点座標系 v_i 、そして要素内曲線座標 (ξ, η, ζ) である。各節点には5自由度を設ける。並進変位自由度 (u_1, u_2, u_3) は全体座標系と同一方向に、また、回転変位自由度 (ϕ_1, ϕ_2) は、節点座標系上の要素面内方向の2直交軸まわりについて定義される。

局所座標系 z_i を用い、シェル理論の仮定から ε_{33} を省略し、 i 節点における節点変位 $\delta^i = [$

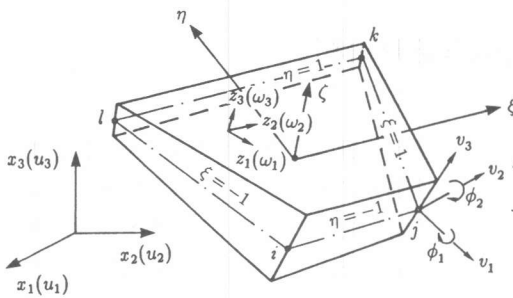


図1 シェル要素

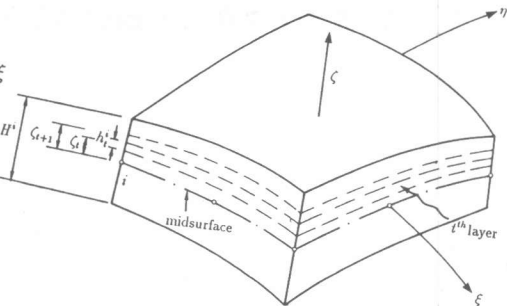


図2 層分割法

$u^i, \phi^i]^T$ より、最終的にひずみは次のような形で求められる。

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} \end{bmatrix}^T = \sum_i^4 \begin{bmatrix} B_u^i & B_{1c}^i + \zeta B_{2c}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^i \\ \Phi^i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $B_u^i = G_a(N_i)\theta^T$, $B_{1c}^i = \frac{1}{2}G(\zeta)H^i(N_i)\theta^T\theta_c^i$, $B_{2c}^i = \frac{1}{2}G(N_i)H^i\theta^T\theta_c^i$,

$$G(y) = \begin{bmatrix} \partial y / \partial z_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial y / \partial z_2 & 0 \\ \partial y / \partial z_2 & \partial y / \partial z_1 & 0 \\ \partial y / \partial z_3 & 0 & \partial y / \partial z_1 \\ 0 & \partial y / \partial z_3 & \partial y / \partial z_2 \end{bmatrix} \quad \theta_c^i = \begin{bmatrix} -V_{21}^i & V_{11}^i \\ -V_{22}^i & V_{12}^i \\ -V_{23}^i & V_{13}^i \end{bmatrix}$$

また、 N_i は双一次要素の形状関数、 H^i は節点 i での板厚、 V_{kl}^i は単位節点座標系ベクトル、 θ は全体座標と局所座標に関する方向余弦マトリックスである。

線形弾性材料では、板厚方向に関して2点の数値積分で曲げ挙動を十分に算定できる。また方向余弦マトリックスが ξ によって変化しないと仮定し、さらにヤコビアン・マトリックス J (ξ, η, ζ)は中央面上 ($\zeta = 0$) の値で近似すると、板厚方向の積分を前もって処理することができる。しかしながら、非線形材料に対しては、板厚方向に高次数値積分を行う必要がある。特に板厚方向において何種類もの異なった材料で合成したRCシェル要素および他の積層構造に対しては、その性状を捕促するために適当な積分点を取らなければならない。一方、図-2で示した層分割法を導入すると線形弾性を同様に扱うことができる。最後に、非線形支配方程式を次のように表すと、

$$\sum_j K^{ij} \cdot \delta^j = f^i \quad (2)$$

その節点 i, j の部分の剛性マトリックス K^{ij} は次式で与えられる。

$$K^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_t \begin{bmatrix} {}^t k_{11}^{ij} & {}^t k_{12}^{ij} \\ {}^t k_{21}^{ij} & {}^t k_{22}^{ij} \end{bmatrix} |J(\xi, \eta, \zeta_t)| d\xi d\eta \quad (3)$$

ここで、 ${}^t k_{11}^{ij} = (\zeta_{t+1} - \zeta_t)(B_u^i)^T D B_u^j$

$${}^t k_{12}^{ij} = (\zeta_{t+1} - \zeta_t)(B_u^i)^T D B_{1c}^j + \frac{1}{2}(\zeta_{t+1}^2 - \zeta_t^2)(B_u^j)^T D B_{2c}^j$$

$$\begin{aligned}
{}^t k_{21}^{ij} &= (\zeta_{t+1} - \zeta_t) (B_{1c}^i)^T D B_{1c}^j + \frac{1}{2} (\zeta_{t+1}^2 - \zeta_t^2) (B_{2c}^j)^T D B_{2c}^j \\
{}^t k_{22}^{ij} &= (\zeta_{t+1} - \zeta_t) (B_{1c}^i)^T D B_{1c}^j + \frac{1}{2} (\zeta_{t+1}^2 - \zeta_t^2) \{ (B_{1c}^i)^T D B_{2c}^j \\
&\quad + (B_{2c}^i)^T D B_{1c}^j \} + \frac{1}{3} (\zeta_{t+1}^3 - \zeta_t^3) (B_{2c}^i)^T D B_{2c}^j
\end{aligned}$$

本要素を、次数低減積分法の面内一点積分要素として用いると、剛体変位以外の零エネルギーであるアワーグラスモードを含むため、これらのいくつかの変位パターンに関しては剛性マトリックスが特異になる。したがって、このようなモードに対処するため、FlanaganとBelytschko³⁾によって提案されたhourglass control schemeを採用した。

3. 材料モデル

3. 1 ひびわれを有する鉄筋コンクリート板要素の構成方程式

ひびわれ発生前においては鉄筋コンクリートを弾性体と考えても差し支えなく、鉄筋とコンクリートの構成式は、それぞれ単体としての弾性構成式をそのまま用いることができる。ところが、ひびわれ発生後は、鉄筋コンクリートを特徴づけるクラック、tension stiffening効果、クラック間のせん断伝達、圧縮剛性の低下等の現象を生じるため、これらの現象を鉄筋コンクリートの構成式に含めてモデル化する必要がある。著者らはこれらの現象をそれぞれモデル化^{8) 10)}し、損傷力学モデルおよびsmeared crackモデルを展開することにより、その一般的な構成方程式を構築した^{7) 9)}。この解析モデルは引張剛性、圧縮剛性の低下、クラック面でのせん断伝達、主筋のダウエル作用、各非線形要因間のcoupling作用などの非線形挙動を精度良く再現できるのが特徴である。結果として、membrane 要素の応力 $\sigma_m (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})^T$ とひずみ $\varepsilon_m (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})^T$ の関係は次の式で表せる。

$$\sigma_m = (I - \Omega_m) D_{cm} \varepsilon_m \quad (4)$$

ここで D_{cm} は平面応力状態でのコンクリートの弾性応力マトリックスで、 Ω_m は損傷程度および鉄筋による補強程度を総合的に評価する4階テンソルであるが、ここではマトリックス表示する(Ω_m については参考文献9)を参照)。そして、クラックおよび面内鉄筋による板の断面内のせん断剛性の変化を無視して、degenerateシェル要素について式(4)を書き直すと次式になる。

$$\sigma = (I - \Omega) D_c \varepsilon \quad (5)$$

ここで、

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c = \frac{E_c}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_s(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_s(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

また、 E_c および ν はそれぞれコンクリートのヤング率とポアソン比で、 k_s は弾性状態の有効せん断係数であり、5/6を用いる。

3. 2 コンクリートの圧縮挙動

文献⁶⁾では、損傷パラメータの導入により拡大あるいは縮小するコンクリート材料の降伏曲面を定義し、圧縮荷重を受けるコンクリート材料の終局に至る全領域にわたる応力、ひずみ関係を簡明に表現しうる、硬化および軟化構成モデルを提案した。ここでは、変動内部摩擦角および変動付着力を用いた Drucker-Pragerの降伏曲面および関連流れ則の適用について簡単に説明する。

圧縮子午線で、Mohr-Coulomb則とDrucker-Pragerの降伏曲面を一致させると、Drucker-Prager

の載荷曲面が次のように書ける。

$$f(\sigma, \omega) = \alpha_f I_1 + \sqrt{J_2} - k_f = 0 \quad (6)$$

$$\alpha_f = \frac{2 \sin \phi^*}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi^*)}, k_f = \frac{6c^* \cos \phi^*}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi^*)}$$

ここでは、 I_1 、 J_2 は、2つの応力不変量である。また ϕ^* 、 c^* は変動内部摩擦角および変動付着力であり、損傷パラメーター ω ⁶⁾によって次式で定義する。

$$c^* = c \exp[-(m\omega)^2]$$

$$\begin{cases} \phi^* = \phi \sqrt{2\omega - \omega^2} & \omega \leq 1 \\ \phi^* = \phi & \omega > 1 \end{cases} \quad (7)$$

さらに c 、 ϕ は、Mohr-Coulombの基準に関する2つの強度係数、 m は材料係数で、2を用いる。

関連流れ則を用いると塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$ は次式で求められる。

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (8)$$

ここで、 $d\lambda$ は塑性ひずみ増分の大きさを決める比例係数である。

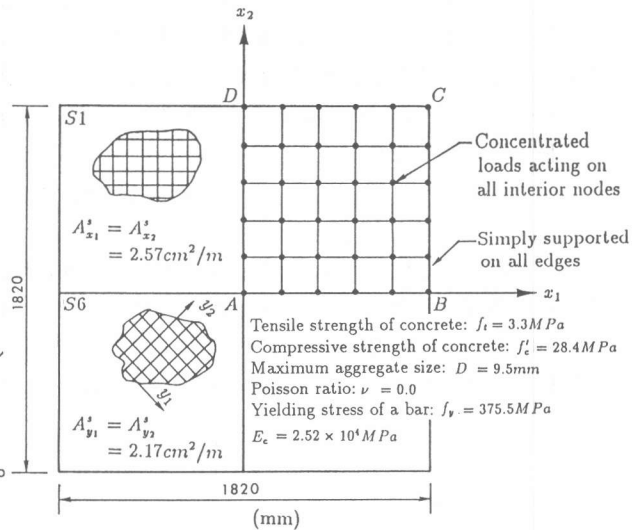
4. 非線形求解法

前節の有限要素法の定式化および材料モデルに従って構造物の荷重-変形曲線を計算するために初期応力法に基づく荷重増分法を用いた。また、極限点後の変位が増加し荷重が減少する不安定な経路を追跡する問題を解くためにCrisfield²⁾の修正弧長法を導入して、反復計算を行う。収束基準としては、一般のresidual force収束基準を適用した(収束判定の基準値 $=10^{-3}$)。

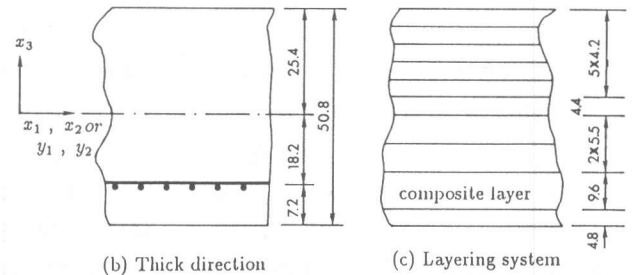
5. 数値計算

5. 1. 試験体のモデル化

鉄筋コンクリート板についての実験は、支持条件、鉄筋の配置などを変数として、数多く行われてきた。1966年にTaylorら⁵⁾は鉄筋の配置がRC板の挙動に及ぼす影響を調べるために、一連の実験を行った。本研究ではそのなかのS1とS6という2つの供試体を用いて数値計算を行う。両供試体とも直交二方向に等量な鉄筋が配置されているが、S1に対しては供試体の周辺と平行に、



(a) Geometry, reinforcement, material properties and F.E. mesh



(b) Thick direction

(c) Layering system

図3 供試体S1、S6および有限要素モデル

S6には周辺と45°の角度で配筋されている。図-3(a)は供試体の寸法、鉄筋の配置、材料特性及び要素分割を示している。幾何対称性より供試体の1/4であるABCD部分のみ解析を行う。

図-3(b)は供試体の断面詳細である。また用いた積層分割について図-3(c)に示した。全部で板厚方向に10層に分割するが、鉄筋についてはその周囲のコンクリートと混合して一つの混合層とした。この混合層の中心は実際の鉄筋の位置と一致している。Tension stiffening効果を算定するため、クラックを生じた領域のコンクリート層と混合層において同様な平均鉄筋比を与えた。

5. 2 解析結果

図-4に供試体S1とS6の荷重－変形曲線を示す。解析の結果は実験とはほぼ一致している。最大載荷後の実験データがないが本解析は最大載荷後の挙動も追跡している。全荷重が10t程度以下のとき、S1では生じたクラックの方向はほぼ鉄筋方向と45°であり、S6ではクラックの方向はほぼ鉄筋方向と一致していた。したがって、S6ではより大きな

Tension stiffening効果を生じている。最終的に、鉄筋比の多い方がより高い耐荷力を持つことが、再現されている。S1については、Berg(1973)¹⁾とRajagopal(1976)⁴⁾がFEM解析を試みている。図-5はBergとRajagopalらの解析結果と本解析結果を比較したものである。図-5からわかるようにBergとRajagopalの解析では変形を過大評価している。例えば、初期クラックにより生じた供試体中心点のたわみの増分は開始時点の値の約6倍となっている。これはBergが指摘したように適当な

Tension stiffeningモデルを

用いていないためである。最後に図-6および図-7は計算上の最大荷重時のS1とS6のクラックパターン、鉄筋の降伏状態(マーク" = "は鉄筋の降伏およびその方向を示している)、中心断面($x_2=0$)のたわみなどをそれぞれ示している。これらは定性的に実験結果と一致している。また、

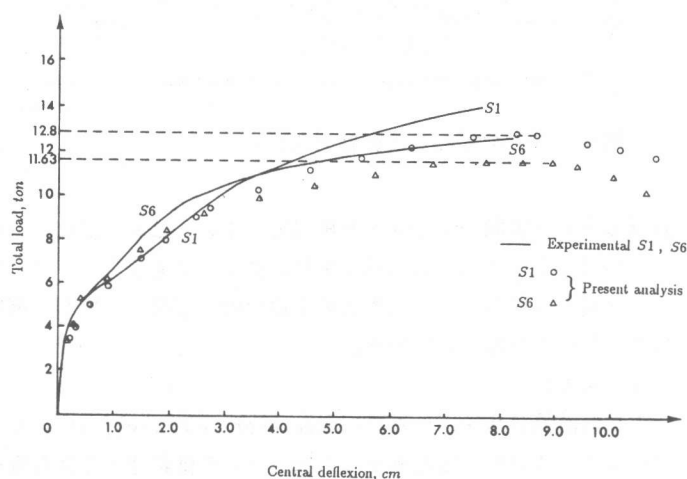


図4 荷重－たわみ曲線

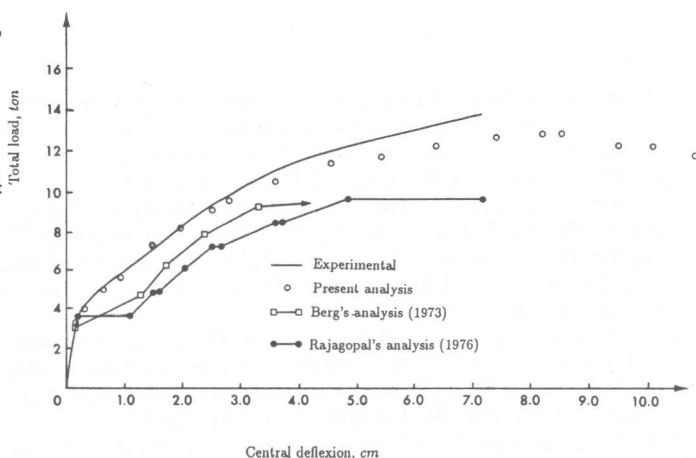


図5 供試体S1の荷重－たわみ曲線

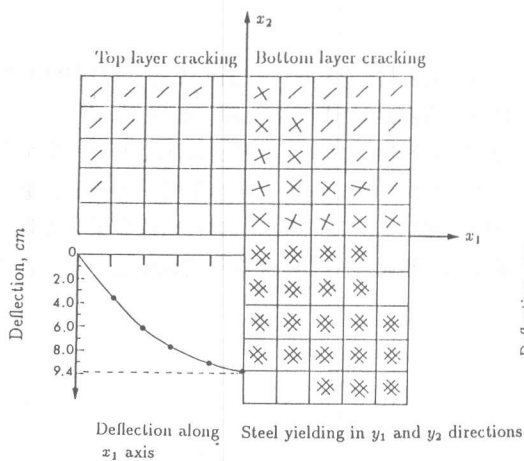


図6 最大荷重時の解析結果 (S1)

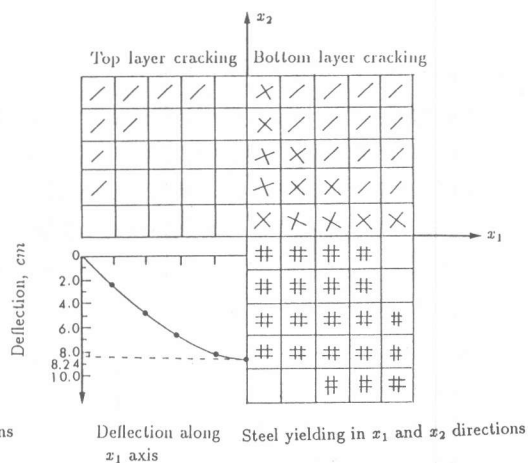


図7 最大荷重時の解析結果 (S6)

直行しない2方向のクラックも再現できることは本解析の一つの特徴である。さらに、板のコーナーの持ち上げにより上層部で生じたクラックも表現できている。

計算時間に関しても本研究では面内一点積分を施し、板厚方向の積分を前もって処理したため、かなり短縮されている。

6. まとめ

次数低減積分法を用いた双一次degenerateシェル要素による非線形材料モデルを導入した解析方法について述べ、数値例としてTaylorらの供試体の非線形解析を行った。本解析法は様々な非線形性を考慮でき、極限点後の挙動を含むRCプレートシェル全領域の非線形挙動を追跡できる効率的な解析手法として、十分な有効利用が期待できる。

参考文献

- 1) Berg, S.: "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates.", Proc. Second International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. M., Germany, 1973.
- 2) Crisfield, M. A.: "A Fast Incremental/Iterative Solution for Procedure that Handles Snap-Through.", Computer & Structures, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.
- 3) Planagan, D. P., and Belytschko, T.: "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control.", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 679-706., 1981.
- 4) Rajagopal, K.: "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams, Beam-Columns and Slabs by Finite Elements.", Published on Demand by University Microfilms International, Ann Arbor, Michigan, USA-London, England, 1976.
- 5) Taylor, R., Maher, D. R. H., and Hayes, B.: "Effect of the Arrangement of Reinforcement on the Behavior of Reinforced Concrete Slabs.", Magazine of Concrete Research, Vol. 18, No. 55, pp. 85-94., 1966.
- 6) 吳 智深・田辺忠顕: "A Hardening and Softening Model of Concrete Subjected to Compressive Loading.", 構造工学論文集, 日本建築学会, Vol. 36., 1990.
- 7) Wu, Z. S., Yoshikawa, H., and Tanabe, T.: "Nonlinear Aspects of Cracked Reinforced Concrete by the Damage Mechanics Concept.", Proceedings of the Second East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, Chiang Mai, Thailand, pp. 481-486., 1986.
- 8) Wu, Z. S., Yoshikawa, H., and Tanabe, T.: "Tension Stiffness Model for Cracked Concrete." J. Struct. Div., ASCE, to appear.
- 9) 吳 智深: "Development of computational models for reinforced concrete plate and shell elements.", 名古屋大学学位論文.
- 10) Yoshikawa, H., Wu, Z. S., and Tanabe, T.: "An Analytical Model for Shear Slip of Cracked Concrete", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 115, No. 4, pp. 771-788., 1989.
- 11) Zienkiewicz, O. C.: "The Finite Element Model in Engineering Science.", McGraw-Hill, London, 1971.