

[111] ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート 構造物の非線形解析

正会員 伊良波 繁 雄 (琉球大学工学部)

1. はじめに

近年、剛体バネモデルを初めとし、要素境界でヒンジ、すべりを表現する新しい型の要素が開発され、骨組、板、地盤等の極限解析に大きな成果を上げている。剛体バネモデルは上田等²⁾によって鉄筋コンクリート構造物の極限解析に応用され、少数の要素で崩壊解析ができることを示した。渡辺等¹⁾は図-1に示すように、辺中央に自由度をもつ2次元ハイブリッドストレスモデルを提案した。このモデルは、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理で要素境界積分項を座標変換し、応力場として一次式の釣合応力場を仮定し、要素境界変位場は辺に垂直方向に一次式、接線方向に一定として導かれた。渡辺等³⁾は、このモデルを用いて完全弾塑性体の上界解を求める方法を示した。また、ハイブリッドストレスモデルは筆者によって、コンクリート、土、岩等のように破壊条件式がモールクローン式で表示できる材料の極限解析ができるように拡張された。本研究ではハイブリッドストレスモデルを鉄筋コンクリート構造物の崩壊解析に応用した。

2. 理 論

すべり面においてモールクローン式を満足させる方法および引張破壊に伴う応力解放の取り扱い方について説明する。ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理は

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left(\iint \nu n B (\sigma_{ij}) dx dy - \int \partial \nu n u_i T_i ds + \int s \sigma n u_i \bar{T}_i ds \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで $B (\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー、 u_i : 変位、 σ_{ij} : 応力、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 、 n_j : 方向余弦、 $\bar{T}_i$: 外力、 Σ : 要素全部の和を意味する。図-1に示すように全体座標系を x, y 軸とし、局部座標を要素境界ごとに n, s 軸を仮定すれば変位、応力について、それぞれ次式が成立する。

$$u_x = \ell U - mV, \quad u_y = mU + \ell V$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \ell^2 + 2\tau_{xy} \ell m + \sigma_y m^2, \quad \sigma_s = \sigma_x m^2 + \sigma_y \ell^2 - 2\tau_{xy} \ell m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad (3)$$

ここに ℓ, m は方向余弦、 u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。U, V はそれぞれ要素境界の n 方向、 s 方向の変位を示す。式(2)、(3)を用いて、式(1)の右辺第2項の積分を変換すると、

$$\begin{aligned} \int \partial \nu n u_i T_i ds &= \int \partial \nu n [(\ell U - mV)(\sigma_x \ell + \tau_{xy} m) + (mU + \ell V)(\tau_{xy} \ell + \sigma_y m)] ds \\ &= \int \partial \nu n (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds \end{aligned} \quad (4)$$

となる。式(1)の右辺第3項についても同様に計算できるので、式(1)は次のようになる。

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left[\iint \nu n B (\sigma_{ij}) dx dy - \int \partial \nu n (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds + \int s \sigma n (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds \right] \quad (5)$$

つぎに、要素境界にすべりが生じ、すべっている間、 τ_{ns} と σ_n の関係は図-2に示すモールクローンの式が成立しているとすれば、すべり面において次式が成立する。

$$\Delta \tau_{ns} \pm C_1 \Delta \sigma_n = 0, \quad C_1 : \text{摩擦係数} \quad (6)$$

ここで、 Δ は増分記号である。すべり面において、式(6)を満足させるために、ラグランジェの未定乗数 Γ を用いて式(5)に導入すれば

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} - \int s s \Gamma (\tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n) ds \quad (7)$$

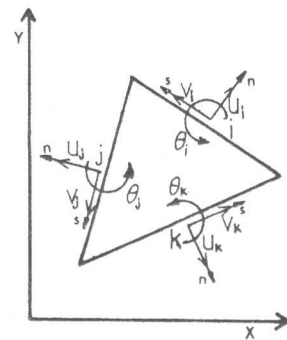


図-1 二次元ハイブリッド
ストレスモデル

となる。ここで、 S_s ：すべり面である。式(7)では簡単のために増分記号 Δ を省略して示した。つぎに、荷重が増加するにつれて破壊が進行する場合を考える。本研究で仮定している破壊条件は図-2に示すように、すべりに対してはモールクーロンの式を仮定し、圧縮側と引張側に対しては、それぞれ圧縮強度(F_c)と引張強度(F_t)の限界値を設定している。要素境界の垂直応力度($\bar{\sigma}_n$)が F_t に達すると応力解放を伴って要素境界にひびわれが生じる。この時、数値計算の上で新しい節点が必要となる。材料の応力-ひずみ関係を完全弾塑性体で表わせば、垂直応力度が F_c に達した後は、応力増分が零となる。このために、本研究では応力の伝達が零となるように、降伏後の節点を切り離す方法をとっている。したがって、いずれの破壊が起っても変位の自由度が増加することになり、数値計算の上で困難な問題となる。ここでは破壊の進行によって増加する変位の自由度を要素単位で消去する方法で計算を行なった。たとえば、図-3に示すように、すべり破壊と引張破壊が生じている場合を考える。式(7)で変位の増加に関連する項をAとすれば

$$A = - \int_{Sc} (U \bar{\sigma}_n + V \tau_{ns}) ds + \int_{Sc} (U \bar{\sigma}_n^L + V \tau_{ns}^L) ds - \int_{Ss} \Gamma (\tau_{ns} \pm C_s \bar{\sigma}_n) ds \quad (8)$$

となる。ここで Sc ：引張破壊面、 $\bar{\sigma}_n^L$ と τ_{ns}^L は解放応力である。 Π_{CH} の一周積分は引張破壊面については式(8)、で計算し、それ以外は式(5)で計算を行う。しかし、式(5)で Π_{CH} の一周積分を引張破壊面以外だけで行うのは要素ごとに積分する辺の数が違うこととなり不便である。このために、引張破壊面の存在に関係なく一周積分し、連立一次方程式を解く時に、引張破壊面の U 、 V が零となるように計算を行っている。変分原理を整理すれば

$$\Pi_{CH}^{**} = \Pi_{CH} + A \quad (9)$$

となり、付帯条件は

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{CH} \text{ 内の } U, V & \text{ は } U=0, V=0 : Sc \text{ 上} \\ V=0 : Ss \text{ 上, } \bar{\sigma}_{ij,j} &= 0 : Vn \text{ 内} \\ U=\bar{U}, V=\bar{V} : Su \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。なお、圧縮破壊に対しては、 $\bar{\sigma}_n^L = \tau_{ns}^L = 0$ である。つぎに、剛性マトリックスを導くために、応力と変位を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad \bar{\sigma}_y = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \\ \tau_{xy} &= -\beta_2 y - \beta_6 x + \beta_7 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$U = u_i + \theta_i S, \quad V = v_i \quad (12)$$

式(12)で u_i, v_i, θ_i は図-1に示すように、辺中央の変位である。つぎに、式(11)を式(13)のように表わし、ひずみと応力の関係式を式(14)のように表わす。

$$\{\bar{\sigma}\} = [B] \{\beta\} \quad (13)$$

$$\{\epsilon\} = [C] \{\bar{\sigma}\} \quad (14)$$

式(13)、(14)を用いれば、式(5)の右边第1項は次式のようになる。

$$\iint_{vn} B(\bar{\sigma}_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \quad (15)$$

ここで、 $[H] = \iint_{vn} [B]^T [C] [B] dx dy$ である。式(5)の右边第2項は式(3)、(11)、(12)より

$$\int_{\partial vn} (U \bar{\sigma}_n + V \tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (16)$$

となる。ここで $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7\}$ 、 $\{u\} = \{u_i, v_i, \theta_i, \dots, \theta_k\}$ である。外力ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とすれば式(5)の荷重項は

$$\int_{Ss} \bar{\sigma}_n (U \bar{\sigma}_n + V \tau_{ns}) ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \quad (17)$$

となる。式(8)の右边第1項と第3項をまとめて計算すると、

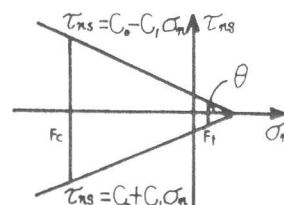


図-2 降伏破壊曲面

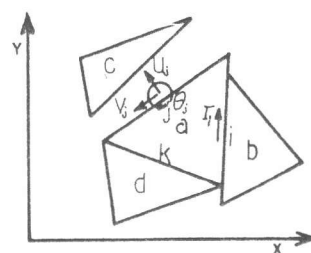


図-3 要素aの破壊状況

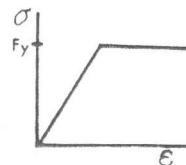


図-4 鉄筋の応力-ひずみ関係

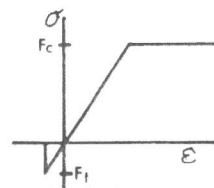


図-5 コンクリートの応力-ひずみ関係

$$-\int s_s \Gamma (\tau ns \pm C_i \delta n) ds - \int s_c (U \delta n + V \tau ns) ds = -\{\beta\}^T [G]^* \{\Delta\} \quad (18)$$

となる。図-3の要素aについて示すと、 $\{\Delta\} = \{\Gamma u_{ij} \theta_j\}$ である、 Δ は破壊によって増加した自由度である。一般的に $[G]^*$ 、 $\{\Delta\}$ は要素境界の破壊状況を考慮して作成する。つぎに、応力解放による節点力を $\{\bar{F}^L\}$ とすると式(8)の第2項は、

$$\int s_c (U \delta n + V \tau ns) ds = \{\Delta\}^T \{\bar{F}^L\} \quad (19)$$

となる、式(15)、(16)、(17)、(18)、(19)式を(9)に代入すれば

$$\Pi_{CH}^{**} = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} - \{\beta\}^T [G]^* \{\Delta\} + \{\Delta\}^T \{\bar{F}^L\} \quad (20)$$

となる。式(20)で $\{\beta\}$ について停留条件を求めると

$$\{\beta\} = [H]^{-1} ([G] \{u\} + [G]^* \{\Delta\}) \quad (21)$$

となる。式(21)を式(20)に代入し、 $\{u\}$ 、 $\{\Delta\}$ に関する停留条件を求めると、それぞれ

$$[K_{11}] \{u\} + [K_{12}] \{\Delta\} = \{\bar{F}\} \quad (22)$$

$$[K_{21}] \{u\} + [K_{22}] \{\Delta\} = \{\bar{F}^L\} \quad (23)$$

となる、ここで

$$\begin{cases} [K_{11}] = [G]^T [H]^{-1} [G], [K_{12}] = [G]^T [H]^{-1} [G]^* \\ [K_{21}] = [G^{*T}] [H]^{-1} [G], [K_{22}] = [G^{*T}] [H]^{-1} [G^*] \end{cases} \quad (24)$$

である、式(22)、(23)より $\{\Delta\}$ を消去すると

$$([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}]) \{u\} = \{\bar{F}\} - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} \{\bar{F}^L\} \quad (25)$$

となる。式(25)はすべり、引張破壊によって増加した自由度を消去した剛性マトリックスで、全体剛性マトリックスを作成する上で便利である。

3. 構成材料のモデル化

鉄筋の応力-ひずみ関係は図-4に示すように完全弾塑性体を仮定する。鉄筋とコンクリートの付着は完全付着を仮定している。コンクリートの応力-ひずみ関係は図-5に示すように、圧縮側で完全弾塑性体とし、引張側では応力解放を考慮している。しかし、ひびわれ面でのせん断力の伝達は考慮していない。すべりに対する破壊条件は図-2に示すようにモールクーロン式を仮定し、圧縮側と引張側に限界値を設定している。モールクーロン式は

$$\tau ns = \tan 37^\circ \times \delta n + 0.249 F_c \text{ (末永等)} \quad (26)$$

を仮定した。

4. 数値計算例

4-1. コンクリート板の一軸圧縮強度

平板の一軸圧縮強度解析を行い、仮定したコンクリート強度と板の強度の比較を行った。解析は対称性を利用して、 $\frac{1}{4}$ のみを用いており、図-6に要素分割とすべり線を示した。要素分割はくさび型の破壊が生じるように行った。

解析結果は表-1に示すように、仮定したコンクリート強度と板の強度がよく一致しており、末永等の式の摩擦角 37° 、粘着力 $0.249 F_c$ の値は適切な値と考えられる。なお、ここで用いている破壊条件は圧縮側で無制限として計

S : すべり破壊
F : 圧縮破壊
C : 引張破壊

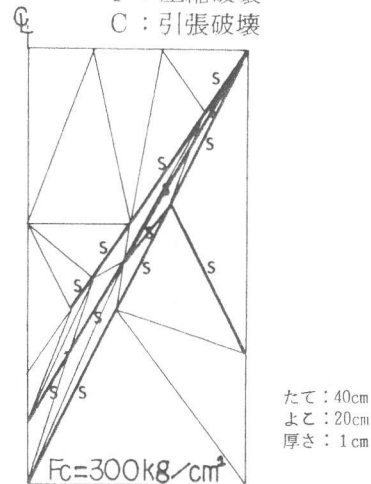


図-6 破壊パターン

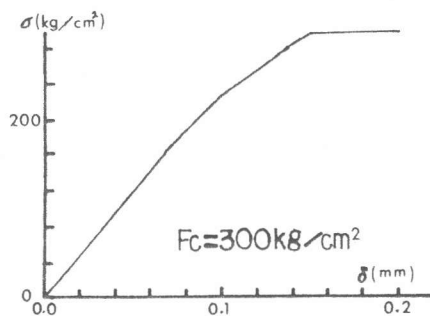


図-7 荷重-変位曲線

表-1 コンクリート板の強度

	コンクリート強度 (kg/cm²)		
	200	300	400
解析値	199.7	299.5	399.4

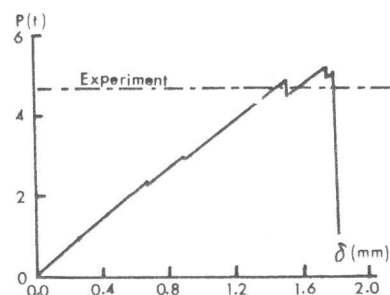


図-8 荷重-変位曲線

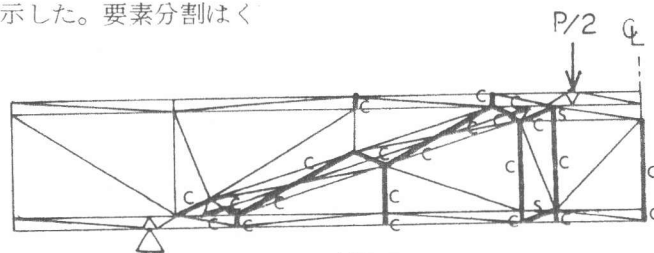


図-9 破壊パターン

算した。

4-2、JCI試験体の解析（その1）

試験体は断面が $20 \times 10 \text{ cm}$ のせん断スパン比が3.5のせん断補強筋のない矩形はりである。実験では4.7 tの時に斜めひびわれが発生し、急激な斜め引張破壊を起した。解析では、コンクリート部の強度を円柱供試体強度の0.85として計算した。ひびわれの状態を図-9、荷重-変位曲線を図-8に示した。解析で得られた崩壊荷重は実験結果より少し高めであるが、急激な破壊を起しており、斜め引張破壊の特徴をよくとらえている。なお変形量は実験値と比較してかなり小さめである。

4-3、JCI試験体の解析（その2）

試験体は断面が $22.9 \times 7.6 \text{ cm}$ のせん断スパン比1.0のせん断補強筋のないディープビームである。実験では斜めひびわれ発生後、荷重が21.8 tに達した時にウェブコンクリート圧壊した。解析結果は図-10、11に示した。解析では7.2 tでウェブコンクリートに斜めひびわれが発生し、25.7 tの時にスパン中央上部のコンクリートが圧壊し、25.9 tの時に引張鉄筋に降伏が起った。さらに、支点上のコンクリートが圧壊し、以後変形が急速に増加した。なお、破壊荷重は27.8 tであるので、実験値よりもかなり高目である。

4-4、コーベルの解析

試験体は原等⁵⁾によって行われたコーベルで $a/d=0.3$ 、鉄筋比は0.84%である。なお終局耐力は36.3 tとなっている。解析結果は図-12、図-13に示した。解析では載荷点下部とコーベル下方を結ぶ斜めひびわれが発生した後で、34.4 tの時に引張鉄筋が降伏した。また、42.6 tの時に片持部下部のすべり破壊によって、変形が大きくなった。破壊荷重は実験値よりも高目である。

5. む す び

ハイブリッドストレスモデルをRCはりの耐力を求める問題に応用したが、得られた値は実験値よりも高目であった。今後、ひずみ軟化、ひびわれ面でのせん断での伝達、鉄筋とコンクリートとの付着特性の導入等が必要である。また、コンクリートのすべり破壊の条件式として、末永等の式は良い結果を示した。最後に本研究にあたり貴重な御助言をいただいた、川井忠彦教授（東大生研）、具志幸昌教授（琉球大学）、和仁屋晴謹助教授（琉球大学）に感謝致します。

6. 参考文献

- 1) 川井忠彦編：生研セミナーテキスト（物理モデルによる連続体力学諸問題の解析）、生産技術研究奨励会、第3回（1979年）
- 2) 上田真稔、毛井嵩博、川井忠彦：離散化極限解析法による鉄筋コンクリート構造物の非線形解析、RC構造の有限要素解析に関するコロキウム論文集、日本コンクリート工学協会（昭和59年12月12日）、P179～P186
- 3) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる極限解析（引張強

- 度取り扱い方について）、土木学会第39回年次学術講演会概要集第1部（1984年10月）P137～P138
- 4) 末永保美、石丸麟太郎：組み合わせ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析、日本建築学会論文報告集、No220（昭和49年6月）、P1～P7
- 5) 原 忠勝、北田勇輔： a/d の小さい鉄筋コンクリート片持部材のせん断破壊に関する実験検討、第5回コンクリート工学年次講演会論文集（1983年）、P353～P356

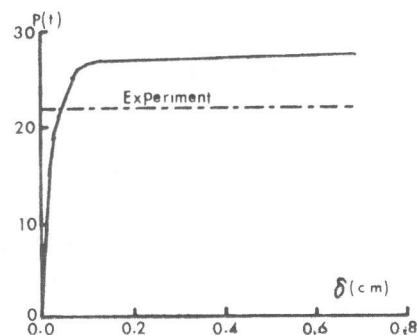


図-10 荷重-変位曲線

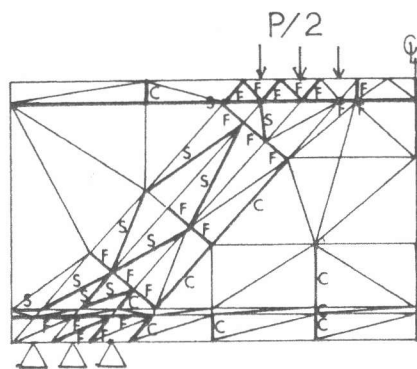


図-11 破壊パターン

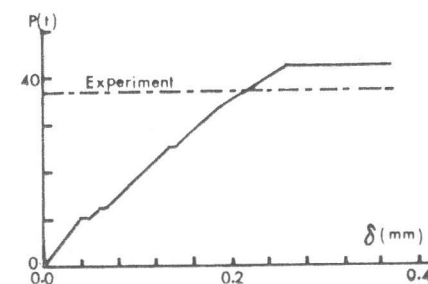


図-12 荷重-変位曲線

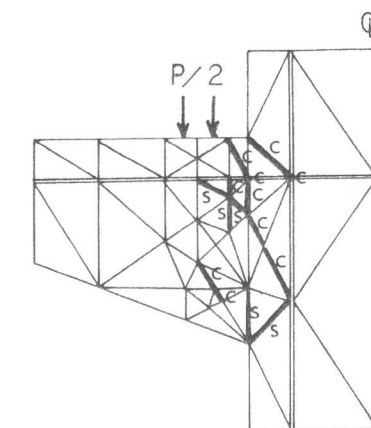


図-13 破壊パターン