

[79] 割裂強さから圧縮強さとせん断強さを推定する式

正会員 浅井 貞重 (東洋大学工学部)

1. ま え が き

割裂強さが既知のとき、この値を用いて圧縮強さとせん断強さを推定する式を誘導した。

2. 割裂試験の主応力と主せん断応力およびその方向

図1のように集中荷重Pが円板に作用するとき円板内の応力分布は(1)式で表わされる¹⁾。ここで主応力 σ_p 、 σ_q が $\sigma_p > \sigma_q$ のとき $\sigma_1 = \sigma_p / \lambda$ 、 $\sigma_2 = 2r \sigma_q / \lambda$ とおけば主応力 σ_1 、 σ_2 と、その方向 θ は材料力学の公式(2)、(3)式に(1)式を代入して纏めると(4)、(5)式となる。なお ξ と η の成立範囲は(6)式であるから、(4)式の分母は常に正であり、従って σ_1 は境界線上でゼロとなる正值(引張応力)、また σ_2 は境界線上でゼロとなる負値(圧縮応力)であることを示している。つぎに主応力線は(5)式と、それに直交する式、すなわち(7)、(8)式なる二つの式が境界条件を満足するように解けばよい。

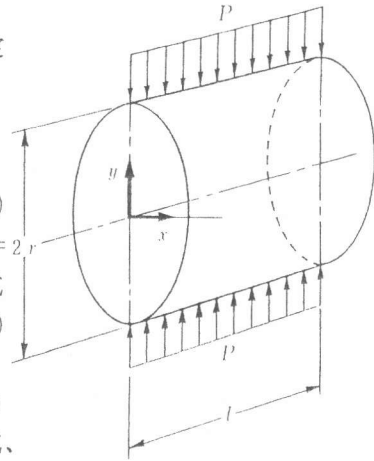


図1 座 標 軸

かくすると(0, r)、(0, -r)を極とする円の直交線群(9)、(10)式を得る(図2参考)。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x / \lambda \\ \sigma_y / \lambda \\ \tau_{xy} / \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \xi \\ \sigma \eta \\ \tau \xi \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi^2 & \xi^2 \\ 1 & (1-\eta)^2 & (1+\eta)^2 \\ 0 & -(1-\eta)\xi & (1+\eta)\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2(1-\eta) / (\xi^2 + (1-\eta)^2)^2 \\ -2(1+\eta) / (\xi^2 + (1+\eta)^2)^2 \end{bmatrix} \quad (1)^{1)}$$

ただし $\xi = x/r$ $\eta = y/r$ $\lambda = P/\pi l r$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma \xi + \sigma \eta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma \xi - \sigma \eta)^2 + 4 \tau \xi \eta} \quad (2)^{1)} \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tau \xi \eta}{\sigma \xi - \sigma \eta} \quad (3)^{1)}$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4} \right) \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4 \eta^2} \quad (4) \quad \tan \theta = \frac{2 \xi \eta}{1 + \xi^2 - \eta^2} \quad (5)^{1)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 \leq 1 \quad (6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{r^2 + x^2 - y^2} \quad (7) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{r^2 + x^2 - y^2}{2xy} \quad (8)$$

$$(y - c_1)^2 + x^2 = c_1^2 - r^2 \quad \therefore \text{中心}(0, c_1) \quad \text{半径} = (c_1^2 - r^2)^{1/2} \quad (9)$$

$$(x + c_2)^2 + y^2 = c_2^2 + r^2 \quad \therefore \text{中心}(-c_2, 0) \quad \text{半径} = (c_2^2 + r^2)^{1/2} \quad (10)$$

$$\tau_1 = \pm (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \quad (11)$$

$$\tau_1 = \pm 2 \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4 \eta^2} \quad (12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(r^2 + x^2 - y^2) + 2xy}{(r^2 + x^2 - y^2) - 2xy} \quad (13) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(r^2 + x^2 - y^2) - 2xy}{(r^2 + x^2 - y^2) + 2xy} \quad (14)$$

つぎに主せん断応力 τ_1 につき考えよう。 τ_1 は(11)式であるから(4)式を(11)式に代入すると(12)式を得る。(12)式より τ_1 は荷重点(0, $\pm r$)で $\pm \infty$ 、他の円周上ではゼロとなる。また τ_1 の方向線は主応力線に対して45°の方向であるから(7)、(8)式より(13)、(14)式の解として得られる。(13)、(14)式より得られた曲線を図3に示す。以上で求めた σ_1 、 σ_2 、 τ_1 と τ_1 の分布を検証するため光弾性実験による等色線写真を、それぞれ1/4円につき図4に示した。図4Cと図4Dは荷重点近傍を除きよく合っているのが分かる。

3. 破 損 条 件

破損時の応力分布は弾性時の応力分布と別のものであり、物性も異なるから破損条件はその材料に合った適当な説またはモデルを採用する必要がある。例えば割裂試験から求まる強さは割裂強さであって引張強さやせん断強さ、圧縮強さなどではないにも拘わらず引張強さの近似値が得られるのは採用した説または係数などが当を得ていたからであろう。ここでは破断面には弾性破損の仮説が成立するものとして分離破壊と迂り破壊につき考える。まず分離破壊として σ_1 が単純引張の破壊応力 σ_t に達したときに破壊するとすると破断面は図2、図4Aより η 軸上となり σ_t 分布は(4)式より周知の式、(15)式となる。(15)式は既に万

人が使用して特別な不都合もなく過している。すなわち(15)式を使用してもよいことはほぼ立証されていると言えよう。

$$\sigma_t = \sigma_1(0, \eta) = 1 \quad \therefore \sigma_{p, \max} = P / \pi l r \quad (15) \quad \tau_1(0, \eta) = \pm 2 / (1 - \eta^2) \quad (16)$$

つぎに、迂り破壊は τ_1 が破壊応力 τ_s に達したとき破壊するとすると破断面は図3、図4Cより η 軸上で 45° の方向をもつジグザグ状の面となるが巨視的には η 軸上と見なされるので τ_1 分布は(12)式より(16)式となり、 τ_1 の分布は図5のようになる。ただし(16)式の複号は+をとる。図5においてせん断遅れにより $\eta = \eta_1$ において τ_1 が迂り強さ τ_s になったとすると、Pの最大値はAの面積が最大となるときである。すなわち η_1 は(16.1)式が最大となる η_1 の値であり(17)式となる。

$$A = \int_0^{\eta_1} \tau_1 d\eta = (1 - \eta_1^2) \int_0^{\eta_1} \frac{\tau_s d\eta}{1 - \eta^2} \quad (16.1) \quad \eta_1 = \tanh(1/2 \eta_1) \quad \therefore \eta_1 = 0.648 \quad (17)$$

故に τ_s は(17)式を(16)式に代入し、せん断面(η 軸)は主せん断応力面と 45° 傾いているから $\sqrt{2}$ で割って(18)式となる。つぎに圧縮強さ σ_c は(15)、(18)式を(11)式に代入して(19)式と求めるのも一興であるが(19)式は鑄鉄にはよく合うものの、コンクリートや岩石には合わない。そこでMESNAGERの説を採用してみた。²⁾すなわ

$$\tau_s = \tau_1(0, 0.648) = \pm 3.45 / \sqrt{2} \quad \therefore \tau_{\max} = \pm 2.44 P / \pi l r \quad (18)$$

$$\sigma_c = \sigma_2(0, 0.648) = -5.90 \quad \sigma_{q, \max} = -5.90 P / \pi l r \quad (19)$$

ちMESNAGERは脆性材料は材料の中に球状の気泡を多数含有していると仮定し(すなわち3次元の欠陥を考え)、その材料が一様圧 σ_2 を受けると気泡の両極と赤道の応力は応力集中により σ_{t1}' 、 σ_{t2}' 、 σ_c' となるので(図6参考)、この応力集中により破れるとした。ただし、図6の記号は(20)、(21)、(22)式である。この説に従い図6を図1の σ_1 、 σ_2 の応力場に適用すると $\sigma_{t'}$ と $\sigma_{c'}$ は(23)式となる。

$$\sigma_{t1}' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 5\nu}{7 - 5\nu} \sigma_2 \quad (20) \quad \sigma_{t2}' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - 5\nu}{7 - 5\nu} \sigma_2 \quad (21) \quad \sigma_{c'} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{9 - 5\nu}{7 - 5\nu} \sigma_2 \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t'} \\ \sigma_{c'} \end{pmatrix} = \frac{3}{2(7 - 5\nu)} \begin{bmatrix} 9 - 5\nu & -(1 \pm 5\nu) \\ -(1 \pm 5\nu) & 9 - 5\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (23) \quad \text{ただし } \nu = \text{ポアソン比}$$

$$A = \int_0^{\eta_1} \sigma_{t'} d\eta = \frac{(9 - 5\nu)\eta_1 - (1 \pm 5\nu)(\eta_1 - 2 \log((1 + \eta_1)/(1 - \eta_1)))}{(9 - 5\nu) - (1 \pm 5\nu)(1 - 4/(1 - \eta_1^2))} \cdot \frac{3\sigma_t}{2(7 - 5\nu)} \quad (24)$$

ただし(23)式の複号の+、-は、それぞれ(20)、(21)式を採用した場合である。ここで(4)式を(23)式に代入して η 軸上の $\sigma_{t'}$ 分布をもとめると図6と類似の分布図を得るのでPが最大となる σ_t の位置 η_1 は(24)式が最大となる η_1 の値である。その値を求めると図7のようになる。ただし図7のAB線は(20)と(22)式、AC線は(21)と(22)式より、それぞれ求めたものであり、一般に延性材料はAB線、脆性材料はAC線に属すようである。以上で η_1 の値が決まったら、その値、すなわち $\xi = 0$ 、 $\eta = \eta_1$ を(4)式の σ_1 、 σ_2 に代入して λ を消去すると(25)式を得る。例えば $\nu = 1/7$ とすると図7のAC線からは $\eta_1 = 0.815$ となるから(25)式より(26.1)式となる。一方、図7のAB線を採用すると $\eta_1 = 0.706$ となるから(25)式より(26.2)式となる。なお図6のように σ_2 のみが作用するときは(20)、(22)式より σ_2 を消去して(27)式を得、(27)式で $\nu = 0$ とおくと $\sigma_{c'}/\sigma_{t'} = -9$ となって、コンクリート材についての実験値($-6 \sim -12$)とよく合うことが示されている。^{2)*}ここで参考として(4)式を(23)式に代入し $\nu = 0$ において $\sigma_{t'}$ 、 $\sigma_{c'}$ 、 $\sigma_{c'}/\sigma_{t'}$ の分布を求めると図8のようになる。なお $\sigma_{c'}/\sigma_{t'}$ は中心($\xi = \eta = 0$)で $-7/3$ 、円周($\xi^2 + \eta^2 = 1$)で -9 の同心円の式(28)式となる。図8Aからは $\sigma_{t'} > 1$ の部分には引張応力による亀裂が生ずる可能性がある事を示している。

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = 1 - \frac{4}{1 - \eta_1^2} \quad (25) \quad \sigma_{c'}/\sigma_{t'} = -10.9 \quad (26.1) \quad \sigma_{c'}/\sigma_{t'} = -6.98 \quad (26.2)$$

$$\frac{\sigma_{c'}}{\sigma_{t'}} = -\frac{9 - 5\nu}{1 + 5\nu} \quad (27) \quad \frac{3}{2} - \frac{5}{1 - (\sigma_{c'}/\sigma_{t'})} = \xi^2 + \eta^2 \quad (28)$$

*: 破損を論じているのであるから、3.の冒頭で述べたように弾性則に従う必要はない。文献2)の著者は ν が突飛な値でなければ良いとしたのであろう(コンクリートや岩石では $\nu = 0$ は認められよう)。筆者もこれに習った。

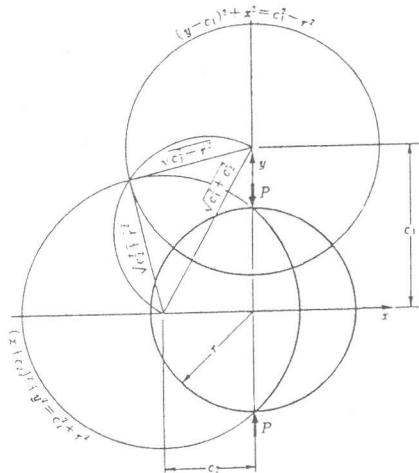


図2 主応力線の描き方

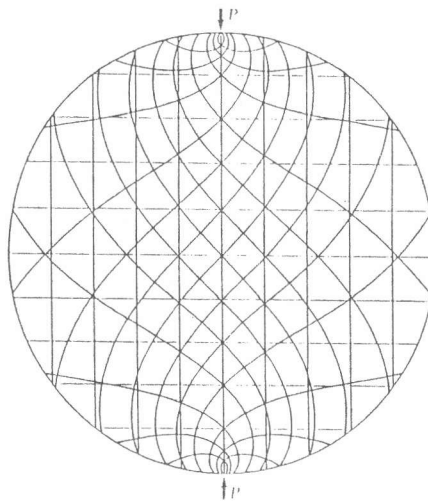


図3 主せん断応力線

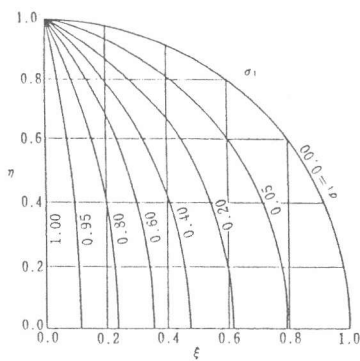


図4A σ_1 の値

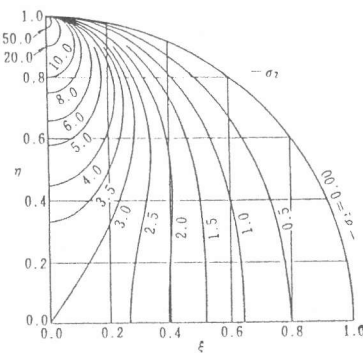


図4B $-\sigma_2$ の値

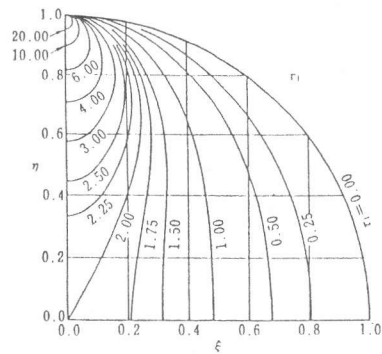


図4C τ_1 の値

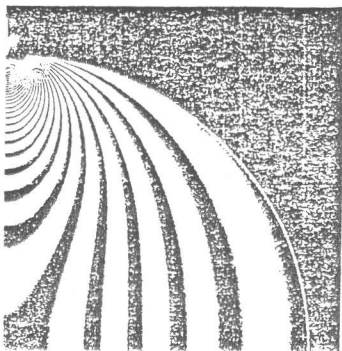


図4D 光弾性実験による等色線写真¹⁾

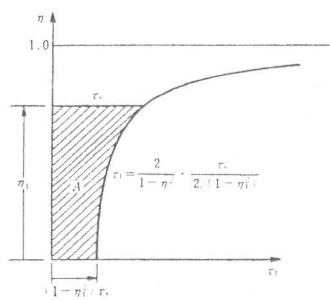


図5 Aの最大面積

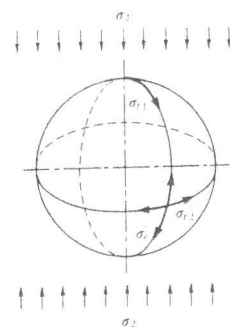


図6 MESNAGERの気泡モデル²⁾

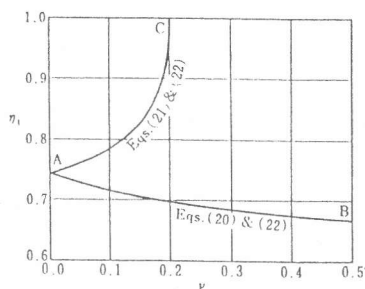


図7 Aが最大となる η_1 の値

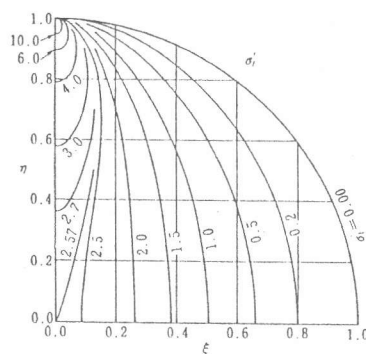


図8A $\sigma t'$ の値

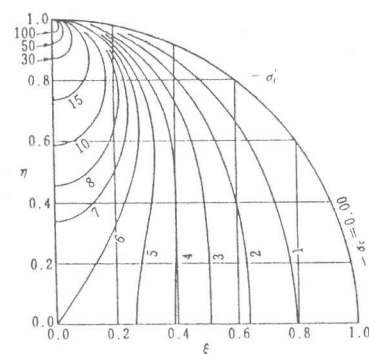


図8B $-\sigma c'$ の値

4. 実験値との比較

実験における載荷点部は応力集中により偏平となるので荷重は有限幅につき作用することになり（即ちHertzの接触条件）、2.の理論式についての境界条件とは異なって表1のようになる。しかし光弾性実験によれば円板を点載荷した場合と剛な平板を介して載荷した場合とでは円板内の応力分布が相違する範囲は荷重点より円板の半径の約20%以内であり、それ以遠ではST. VENANTの原理により等しくなることが分かっている。換言すれば載荷部の近傍が応力集中により圧縮破損しても $\sigma_1 = \sigma_2 =$ 圧縮応力であるから亀裂の伝播は生じず、その部分は応力緩和域となるので(18)、(19)、(26.1)および(26.2)の式の成立にはほとんど影響

ないであろう。この現象は試験片と加圧板の間に応力集中の緩衝材としてボール紙などを挿入する必要のないことを意味している。なお試験片と加圧板の間に摩擦があると強さは大きくなるので注意を要する。つぎに各文献より得られたコンクリートと岩石について、各々の強さ間の関係式は表2のようになる。

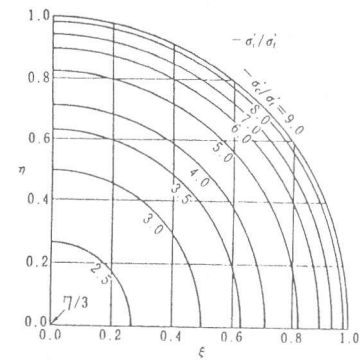


図8C $-\sigma'_c/\sigma'_t$ の値

表1 理論と実験について載荷点の境界条件の違い

	理 論	実 験
σ_1	有限(引張)	有限($=\sigma_2$)(圧縮)
σ_2	∞ (圧縮)	有限($=\sigma_1$)(圧縮)
τ_1	$\pm\infty$	0

表2 本報告値と他論文値との比較

推 定 式	材 料
$\tau_1 = 2.44 \sigma_t$, 本報文 $\sigma_c/\sigma_t = 10.9 (\nu = 1/7)$	(18式、(26.1)式) コンクリート
$\sigma_c/\sigma_t = 10 \sim 13$ $\tau_1 = (1/4 \sim 1/6) \sigma_c$ $= (2.3 \sim 2.5) \sigma_t$	コンクリート ³⁾
$\sigma_c/\sigma_t = 8 \sim 10.8$	コンクリート ⁴⁾

$\sigma c / \sigma t = 7 \sim 14$	コンクリート	5)	
$\sigma c / \sigma t = 6 \sim 12$ = 27.3 = 24.7 = 18.4	コンクリート 花こう岩 大理石 砂 岩	6)	
$\sigma c / \sigma t = 13.5, 16.9, 13.4$ = 11.3, 8.7, 8.0, 8.9 = 7.9, 5.4 = 18.2	大理石 モルタル レジン・モルタル 砂 岩	7)	
$\sigma c / \sigma t = 8$ = 10.8 = 20.0 = 19.3	$\sigma c / \tau_1 = 12.0$ = 12.0 = 12.3 = 11.9	花こう岩 石灰岩 砂 岩 凝灰岩	8)

表2より本報文の推定式より求めた値はコンクリート及び岩につき妥当な値を示すことがわかる。

5. 結 論

コンクリートと岩石を対象として割裂強さからせん断強さと圧縮強さの推定式を導き、実験値と比較し立証した。尚、本報文は割裂強さは既知と仮定し、水セメント比およびポアリン比等の影響は既に割裂強さの中に含まれているものとしている。

1) Coker, E. G. and Filon, L. N. G. : A Treatise on Photo-elasticity, Cambridge at the University Press, p. 407, 1931; Frocht, M. M. : Photoelasticity (vol. II), John Wiley & Sons, P. 126, 1964

2) 山口 昇, 最上武雄: 材料力学, 岩波書店, pp. 68~71, 1939

3) 日本コンクリート工学協会編, コンクリート便覧, 技報堂, pp. 54~55, 1976

4) 内山 実: コンクリートの引張強度とその試験方法に就いて, 鉄道技術研究所彙報, 第3巻 第5号, pp. 160~163, 1944

5) ドイツ・コンクリート協会編: 鉄筋コンクリート構造(二見秀雄ら共訳) 第1巻, コロナ社, p. 13, 1935

6) 山口 昇: 材料強弱並に土圧論(岩波講座, 物理学及び化学), 岩波書店, p. 15~19, 1931

7) 平松良雄, 西原正夫, 岡 行俊: 岩石の引張試験に関する検討, 日本鉱業会誌, vol. 70, No. 793, pp. 285~289, 1954

8) 鈴木 光: 岩盤力学と計測, 内田老鶴圃新社, p. 132, 1975