

[4] コンクリート強度の早期判定式の設定に関する数理的考察

正会員 榎田 佳寛 (建設省建築研究所)

1. まえがき

コンクリート品質の早期判定を実施するためには、適切な早期試験の方法及び手順を決めることと、早期試験の結果の適切な判断方法を決めておくことが必要である。このうち、早期試験の方法・手順については従来の研究で数多くの提案がなされているが、早期試験の結果の判断方法については、早期試験の結果と28日強度試験の結果との間に成立する数理的な関係を考察した研究が殆んどなされておらず、早期試験結果の適切な判断方法は明らかにされていないとはいえない。この論文は、早期強度と28日強度との相関関係についての実験結果や信頼できるデータをもとに、早期強度試験の結果からコンクリート品質の特性値としての28日強度を判定する式を導く際の数理的な関係についての考察を行い、早期判定の基本式を導いたものである。

2. 早期判定式の考え方と基本式を導く手順

コンクリート強度の早期判定式を導くためには、まず28日強度試験によって品質判定を行う場合の合格判定規準を考えることが必要である。

次に、早期判定の対象とする1つの早期強度の分布を考え、この早期強度の分布に対して実現する可能性のある28日強度の分布群の平均的な合格率を計算する。縦軸に合格率を、横軸に早期強度をとり、早期強度の分布の平均値に対して、実現する可能性のある28日強度分布群の平均的な合格率をプロットすると1本の曲線が出来る。また、同じ早期強度の分布から早期判定式によって得られる28日強度推定値の分布の合格率を求め、同じ座標上にプロットすると、もう1本の曲線が出来る。

この2本の曲線が適当な合格率のところで交差するように早期判定式を決めてやれば、その合格率よりも低い合格率のところでは早期判定式によって得られる28日強度推定値の合格率の方が、実現する可能性のある28日強度分布群の平均的な合格率より小さくなり、安全側の判定となる。この2本の曲線が交差する合格率を適当に決めてやれば早期判定式が決まることになり、逆に、既往の早期判定式に対しては、その判定における危険率が評価できることになる。

3. 早期判定式を導くために設けた仮定

早期強度と28日強度の各々の分布並びに両者の関係については以下のような仮定が成立つものとする。

仮定1. 早期強度 F_e と28日強度 F_{28} との相関関係における回帰式は(3.1)式で表わされ、標準誤差は Se とする。

$$F_{28} = aF_e + b \quad (3.1)$$

また、早期強度と28日強度の関係において、28日強度は回帰式に対して正規分布しているものとする。

仮定2. 対象とするコンクリートの早期強度の分布は正規分布 $N(m_e, \sigma_e^2)$ とする。

仮定3. 対象とするコンクリートの28日強度の分布は正規分布 $N(m_{28}, \sigma_{28}^2)$ とする。

仮定4. 対象とするコンクリートの28日強度の標準偏差と早期強度の標準偏差の比の値は、早期強度と28日強度との相関関係における回帰式の傾きに等しいものとする。

$$\sigma_{28} = a\sigma_e \quad (3.2)$$

4. 28日強度試験に対する合格判定規準と合格率の計算

コンクリート強度の合格判定規準にはいろいろなタイプのものが考えられるが、JISA5308やJASS5にみられるように、 N 回の試験結果 $X_1, \dots, X_n$ の平均値及び最小値に関する2つの条件からなる場合が一般的である。

$$\begin{cases} \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq f_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} X_1 = \min(X_1, \dots, X_n) \geq f_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

この論文でも(4.1), (4.2)式によって表わされる合格判定規準を対象とすると, 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う試験値 $X_1, \dots, X_n$ が規準に適合する確率 $L_\sigma(m)$ は, 次式で表わされる。

$$L_\sigma(m) = P(\bar{X}_n \geq f_0, X_1 \geq f_1) = P(X_1 \geq f_1) \cdot P(\bar{X}_n \geq f_0 | X_1 \geq f_1) \\ = P(X_1 \geq f_1) \{1 - P(\bar{X}_n < f_0 | X_1 \geq f_1)\}$$

ここで, $P(X_1 \geq f_1) = \{1 - \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma})\}$ (但し, $\Phi(\cdot)$ は正規分布関数) である。また $P(\bar{X}_n < f_0 | X_1 \geq f_1)$ は, $X_1, \dots, X_n$ の最小値 X_1 が f_1 以上である時, 平均値 $\bar{X}_n$ が f_0 未満となる確率であり, 切断正規分布 $P_1(x)$ に従う N 個の独立な確率変数の平均値が f_0 を越えない確率で表わされる。切断正規分布 $P_1(x)$ は

$$P_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma A} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} & (x \geq f_1) \\ 0 & (x < f_1) \end{cases}$$

$$\text{但し } A = \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma})$$

ここで, $T_n = X_1 + \dots + X_n$ とし, T_n の確率密度関数を $P_n(x)$ とすると, $P(\bar{X}_n < f_0 | X_1 \geq f_1) = \int_{f_1}^{\infty} P_n(x) dx$, この $P_n(x)$ は次のように求められる。

$N=2$ の場合

$$P_2(x) = \int_{f_1}^{\infty} P_1(x-t) P_1(t) dt = \int_{f_1}^{x-f_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma A} e^{-\frac{(x-t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \\ = \frac{1}{2\pi\sigma^2 A^2} \int_{f_1}^{x-f_1} e^{-\frac{(x-t-m)^2}{2\sigma^2}} \left\{ \frac{1}{4\sigma^2} \left\{ (2t-x)^2 + (x-2m)^2 \right\} \right\} dt = \frac{1}{2\pi\sigma^2 A^2} e^{-\frac{(x-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_{f_1}^{x-f_1} e^{-\frac{(2t-x)^2}{4\sigma^2}} dt \\ = \frac{1}{2\pi\sigma^2 A^2} e^{-\frac{(x-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_{\frac{x-f_1}{2}}^{\frac{x-2f_1}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{4}} \cdot \frac{\sigma}{2} d\tau = \frac{1}{2\pi\sigma A^2} e^{-\frac{(x-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_0^{\frac{x-2f_1}{2\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau$$

よって

$$L_\sigma(m) = \left\{ \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma}) \right\}^2 \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{f_1}^{\infty} e^{-\frac{(x-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_0^{\frac{x-2f_1}{2\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau dx \\ = \left\{ \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma}) \right\}^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{f_0-f_1}{\sigma}} e^{-\frac{(y\sqrt{2}(x-\frac{m-f_1}{\sigma}))^2}{2}} \int_0^{2x} e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau dx$$

$N=3$ の場合

$$P_3(x) = \int_{f_1}^{\infty} P_1(x-t) P_2(t) dt = \int_{f_1}^{x-f_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma A} e^{-\frac{(x-t-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi\sigma A^2} e^{-\frac{(t-2m)^2}{4\sigma^2}} \int_0^{\frac{t-2f_1}{2\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau dt \\ = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma^3 A^3} e^{-\frac{(x-3m)^2}{6\sigma^2}} \int_0^{x-3f_1} e^{-\frac{(3u\sigma+6\sigma-2x)^2}{12\sigma^2}} \int_0^u e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau du \\ L_\sigma(m) = \left\{ \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma}) \right\}^3 \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma} \int_{f_1}^{\infty} e^{-\frac{(x-3m)^2}{6\sigma^2}} \int_0^{\frac{x-3f_1}{2\sigma}} e^{-\frac{(3u\sigma+6\sigma-2x)^2}{12\sigma^2}} \int_0^u e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau du dx \\ = \left\{ \Phi(\frac{m-f_1}{\sigma}) \right\}^3 \frac{3}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^{\frac{f_0-f_1}{\sigma}} e^{-\frac{(y\sqrt{3}(x-\frac{m-f_1}{\sigma}))^2}{3}} \int_0^{3x} e^{-\frac{(3u-6x)^2}{12}} \int_0^u e^{-\frac{\tau^2}{4}} d\tau dt$$

以下帰納的に求められ, 一般の場合には次式のようになる。

$$L_\sigma(m) = \left\{ \Phi(S) \right\}^N \frac{N}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_0^{\infty} e^{-\frac{N(x-S)^2}{2}} \int_0^{Nz} e^{-\frac{(t-(N-1)x)^2}{2(N-1)/N}} G_N(t) dt dx \quad (4.3)$$

$$\text{但し, } S = \frac{m-f_1}{\sigma}$$

$$R = \frac{f_0-f_1}{\sigma}$$

$$G_N(\xi) = \int_0^\xi e^{-\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{t-(N-2)/(N-1)}{2(N-2)/(N-1)} \right\} \cdot G_{N-1}(t) dt \quad (N \geq 4)$$

$$G_3(\xi) = \int_0^\xi e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{t}{4} \right) dt$$

標準偏差が 1 の場合, (4.3)式は $L_\sigma(S)$ とかけるから, 横軸に S , 縦軸に $L_\sigma(S)$ をとれば, $m-L_\sigma(m)$ のグラフは $S-L_\sigma(S)$ のグラフと同じ意味となる。 $S-L_\sigma(S)$ のグラフの数値計算例を図 1 に示す。

5. 実現する可能性のある28日強度分布の平均的な合格率
 早期判定の対象とするコンクリートの早期強度の分布 $N(m\alpha, \sigma_\alpha^2)$ に対して、実現する可能性のある28日強度分布の1つを $N(m, \sigma_{28}^2)$ とすると、これが合格する確率は $L_{\sigma_{28}}(m)$ で表わされる。次に、早期強度の分布 $N(m\alpha, \sigma_\alpha^2)$ に対して実現する可能性のある28日強度分布の平均値の分布を $N(M, \sigma_1^2)$ とすると、 M 及び σ_1 は、

$$M = am_\alpha + b, \quad \sigma_1^2 + \sigma_{28}^2 = a^2\sigma_\alpha^2 + Se^2$$

となり、仮定4から、後の式は $\sigma_1^2 = Se^2$ となる。従って、強度の分布が $N(m\alpha, \sigma_\alpha^2)$ である時、実現する28日強度分布の平均値が m となる確率は、次式のようになる。

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e \times P \left\{ -\frac{(m-M)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Se} e \times P \left\{ -\frac{(m-(am_\alpha+b))^2}{2Se^2} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

この結果、早期強度の分布は $(m\alpha, \sigma_\alpha^2)$ に対して実現する可能性のある28日強度分布群の平均的な合格率 $\bar{L}(m\alpha)$ は $\bar{L}(m\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{\sigma_{28}}(m) P(m) dm \dots\dots\dots (5.2)$ で計算される。

ここで、 $r = Se/\sigma_{28}$, $S' = \{(am_\alpha+b)-f_1\}/\sigma_{28}$, $S = (m-f_1)/\sigma_{28}$ とすると (5.1) 式は $P(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e \times P \left\{ -\frac{(S-S')^2}{2r^2} \right\} \times \frac{1}{\sigma_{28}} \dots\dots\dots (5.3)$ となり、 $dm = \sigma_{28} ds$ であるから (5.2) 式は、この (5.3) と (4.3) 式とから S の関数として次式のように表わされる。

$$\bar{L}(m\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} L_1(S) P(S) dS \dots\dots\dots (5.4)$$

この数値計算の一例を図2に示す。

6. 28日強度推定値の合格率

正規分布 $N(m\alpha, \sigma_\alpha^2)$ に従う早期強度試験値 F_α に対して (6.1) 式によって得られる28日強度推定値 F_{28} の分布は正規分布 $N(am_\alpha+b-\delta, a^2\sigma_\alpha^2)$ となる。

$$F_{28} = aF_\alpha + b - \delta \dots\dots\dots (6.1)$$

仮定4により、 $a\sigma_\alpha = \sigma_{28}$ であるから、この分布が合格する確率は $L_{\sigma_{28}}(am_\alpha+b-\delta)$ となる。 $k = \delta/\sigma_{28}$ とおいて、標準偏差 σ_{28} で割り、 $S - L_1(S)$ 平面で考えると、この合格率は $L_1(S'-k)$ とかける。この $L_1(S'-k)$ は $L_1(S)$ を S 軸方向右側へ k だけ平行移動したものである。

7. 早期判定式の誘導

$L_1(S'-k)$ と $\bar{L}(m\alpha)$ とが合格率 $P(\%)$ のところで交差するために平行移動しなければならない距離 k を調べると、表1のようになる。 $R \geq \sqrt{N}$ の時、 k はほぼ一定の値に収束しており、合格率 P に対する正規偏差を K_P とする時、

$$k = \frac{K_P}{\sqrt{N}} (\sqrt{1+N\gamma^2}-1) \dots\dots\dots (7.1)$$

と表せる。 $r = Se/\sigma_{28}$ であるから、判定式は、

$$F_{28} = aF_\alpha + b - \frac{K_P}{\sqrt{N}} \sigma_{28} (\sqrt{1+N(-\frac{Se}{\sigma_{28}})^2}-1) \dots\dots\dots (7.2)$$

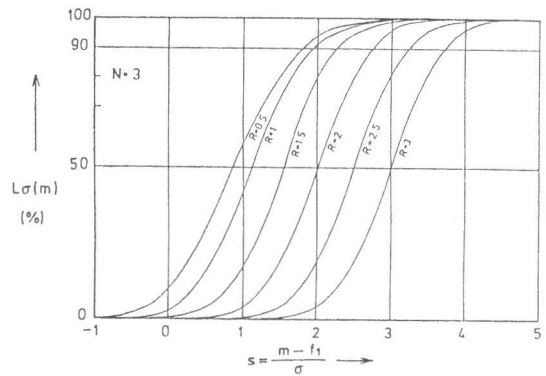


図1 OC 曲線の計算結果

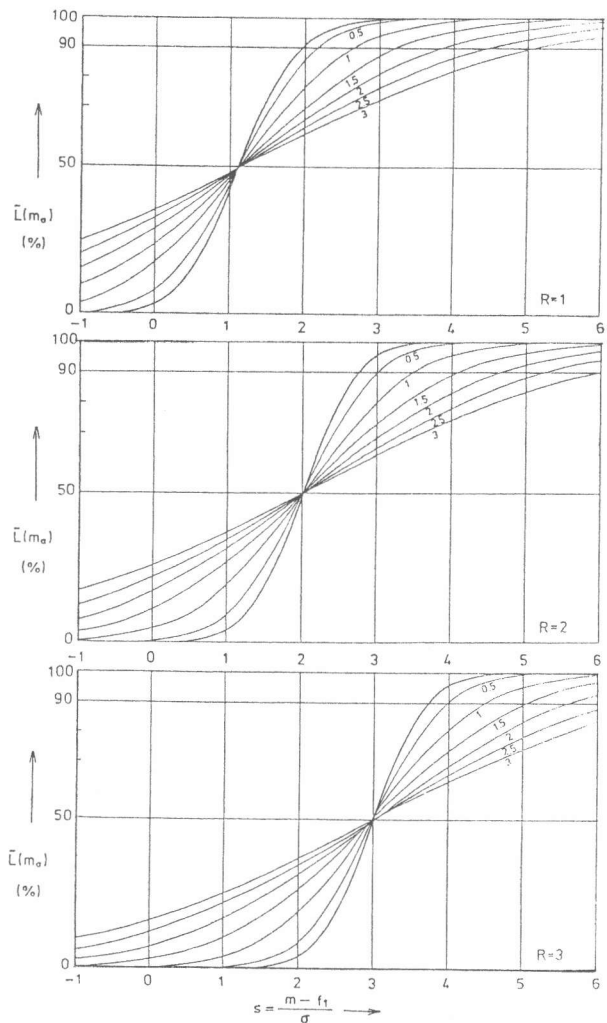


図2 実現する可能性のある28日強度分布群の平均的合格率

とかけ、 $P_u = \frac{\sigma_{28} \sqrt{N}}{S_e}$ とおけば、

$$\bar{F}_{28} = aF_u + b - KpSe(\sqrt{P_u^2 + 1} - P_u) \dots\dots\dots (7 \cdot 3)$$

となる。

表1 判定式 $\bar{F}_{28} = aF_u + b - k\sigma_{28}$ における k の値

N	P	0.5				1.0				2.0				3.0			
		1.5	2.0	3.0	6.0	1.5	2.0	3.0	6.0	1.5	2.0	3.0	6.0	1.5	2.0	3.0	6.0
3	0.98	0.377	0.395	0.395	0.395	1.143	1.175	1.176	1.176	3.028	3.070	3.072	3.072	5.009	5.054	5.057	5.056
	0.95	0.302	0.313	0.313	0.313	0.921	0.938	0.938	0.938	2.441	2.464	2.466	2.466	4.032	4.058	4.060	4.060
	0.90	0.240	0.244	0.244	0.244	0.723	0.732	0.732	0.732	1.913	1.926	1.927	1.927	3.155	3.169	3.171	3.170
6	0.98	0.371	0.457	0.487	0.488	1.169	1.312	1.355	1.356	3.092	3.266	3.321	3.322	5.089	5.274	5.332	5.333
	0.95	0.340	0.382	0.389	0.389	0.999	1.069	1.085	1.086	2.551	2.644	2.668	2.668	4.157	4.257	4.283	4.283
	0.90	0.291	0.310	0.309	0.309	0.813	0.847	0.848	0.848	2.033	2.081	2.087	2.087	3.286	3.339	3.347	3.346
9	0.98	0.344	0.465	0.536	0.538	1.130	1.336	1.443	1.446	3.050	3.304	3.433	3.436	5.048	5.318	5.453	5.456
	0.95	0.317	0.406	0.442	0.442	0.971	1.115	1.170	1.170	2.527	2.703	2.772	2.772	4.134	4.322	4.344	4.395
	0.90	0.281	0.335	0.349	0.350	0.806	0.889	0.914	0.914	2.031	2.134	2.166	2.168	3.285	3.397	3.432	3.434

8. 早期判定式の設定例

以上に述べて来た早期判定式の設定方法を7日強度から28日強度の判定式を設定する場合に適用する。ここで用いるデータは建設省建築研究所で昭和51年以降行ってきた各種の骨材、混和材材を用いたコンクリートの性能に関する実験の中で7日強度、28日強度の両方の試験結果があるものである。対象とするコンクリートは、普通セメント、5種類の川砂、水砕砂、7種類の砂利、3種類の高炉スラグ砕石、AE剤、AE減水剤、流動化剤を用い、調合は水セメント比が40～70%、スランプは8～21cmのもので合計228バッチの結果である。7日強度と28日強度との関係は図3に示すとおりであり、その回帰式は、

$$F_{28} = 1.14F_7 + 84.7 \dots\dots\dots (8 \cdot 1)$$

また標準誤差は19 kg/cm²であった。

さて、適用例であるが、早期判定式はJISA 5308に適用するものとし、判定の危険率を10%とする。また、対象とするコンクリートの標準誤差を25 kg/cm²とする。

$$P_u = \frac{25 \sqrt{3}}{19} = 0.76 \quad Kp = 1.282$$

$$\delta = 1.282 \times 19 \times (\sqrt{0.76^2 + 1} - 0.76) = 12.1$$

よって、この場合の早期判定式は

$$F_{28} = 1.14F_7 + 72.6 \dots\dots\dots (8 \cdot 2)$$

9. む す び

この論文は、コンクリート強度の早期判定における判定式を設定する時の一般的方法を考察したものである。導かれた式は、相関関係における標準誤差を標準誤差とする正規分布と28日強度試験のN個の結果の平均値の分布である正規分布の和の分布においてある正規偏差となる値から、N個の28日強度試験の結果の平均値の分布において同じ正規偏差となる値を差引いた値が、回帰式から判定式までの距離となることを示している。前者の分布が正規分布とみなせるのは、 σ_{28} がある程度以下となった時であるが、 σ_{28} が大きい時の回帰式から判定式までの距離は、正規分布とみなした時よりも逆に小さくなって(7・3)式が安全側の式となる。そして、このことが(7・3)式を判定式とすることが出来ることの根拠となっている。

参考文献 1) 住入豊和・樹田佳寛：コンクリート品質の早期判定における強度判定式の提案、日本建築学会論文報告集、298号、昭和55年12月

2) 住入豊和・樹田佳寛：コンクリート強度の早期判定のための一般式、日本建築学会論文報告集、303号、昭和56年5月

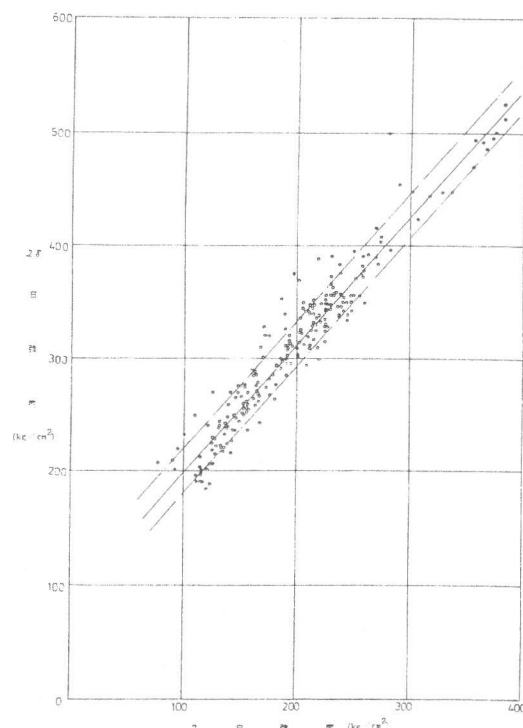


図3 7日強度と28日強度との関係(例)